

# 1

## Elektrizität und Magnetismus

Zum Verständnis der Elektrizität ist ein Blick in die Atomphysik unerlässlich. Die Elektrizität ist eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen zwischen physikalischen Objekten. Elektrische Kräfte spielen beim Atomaufbau sowie bei chemischen Bindungen in Molekülen eine entscheidende Rolle. In der technischen Anwendung stehen jedoch der Ladungstransport und die sich daraus ergebenden Gesetzmäßigkeiten im Vordergrund.

### ■ 1.1 Physikalische Grundlagen

Elektrizität und Magnetismus sind zwei physikalische Erscheinungen, die sehr eng miteinander verbunden sind. Die elektromagnetische Kraft ist eine der vier physikalischen Grundkräfte. Urheber dieser Kraft ist die *elektrische Ladung*. Die Träger der elektrischen Ladung (Ladungsträger) sind Elementarteilchen wie z. B. Elektronen (negative Ladung) und Protonen (positive Ladung). Zwischen elektrischen Ladungen herrschen Kräfte, und zwar ziehen sich ungleichnamige Ladungen an, gleichnamige Ladungen hingegen stoßen sich ab. (Dieses Verhalten unterscheidet sich grundlegend von der Schwerkraft, bei der es nur die Anziehung, aber keine Abstoßung gibt.<sup>1</sup>) Die elektrische Ladung ist, ähnlich wie die Energie, eine *Erhaltungsgröße*, d. h., bei allen Prozessen in einem abgeschlossenen System ändert sich die Gesamtladung nicht.

Die Wirkung einer elektrischen Ladung auf den umgebenden Raum wird durch ein *elektrisches Feld* beschrieben. Ladungsträger sind somit die Quelle eines elektrischen Feldes. Der Feldbegriff ist übrigens wesentlich allgemeiner formuliert und beschränkt sich nicht auf den Elektromagnetismus.

Ruhende Ladungsträger erzeugen ein statisches elektrisches Feld. Bewegte Ladungsträger werden als *elektrischer Strom* bezeichnet. Ein *magnetisches Feld* wird von bewegten Ladungsträgern erzeugt, d. h., jeder elektrische Strom hat ein Magnetfeld zur Folge. Magnetische Ladungen konnten bisher nicht entdeckt werden, das magnetische Feld ist somit quellenfrei.<sup>2</sup>

Nicht nur ruhende oder bewegte Ladungen erzeugen elektrische bzw. magnetische Felder. Zeitliche Veränderungen von elektrischen Feldern rufen magnetische Felder und zeitliche Veränderungen von magnetischen Feldern rufen elektrische Felder hervor. Ein derartiges Verhalten bezeichnet man als Symmetrie.

<sup>1</sup> Offensichtlich tritt die Ursache der Gravitation nur in einer einzigen Form auf und diese führt immer zu einer Anziehung von Massen. Elementarteilchen, die eine andere Art der Gravitation mit abstoßender Wirkung haben, konnten bislang noch nicht entdeckt werden.

<sup>2</sup> Als direkte Folge der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes können keine isolierten magnetischen Nord- oder Südpole existieren. Jeder Dauermagnet hat einen Nord- und einen Südpol. Wird dieser Magnet durchgeschnitten, so entstehen zwei Magnete mit jeweils einem Nord- und einem Südpol.

Das grundlegende Verhalten aller elektromagnetischen Vorgänge kann mit wenigen einfachen Aussagen beschrieben werden. Eine derartige Zusammenstellung spiegelt zwar prinzipiell den Elektromagnetismus wider, kann allerdings bestenfalls ein grober Leitfaden sein. Dennoch ist es wichtig, sich stets aller Zusammenhänge bewusst zu sein, auch wenn einige Aspekte für die Betrachtung eines konkreten Problems von untergeordneter Bedeutung sind.



### Grundlegendes Verhalten elektromagnetischer Vorgänge

- Urheber elektromagnetischer Kräfte ist die elektrische Ladung.
- Die elektrische Ladung ist eine Erhaltungsgröße.
- Die elektrische Ladung kann positiv oder negativ sein.
- Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.
- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab.
- Es gibt keine magnetischen Ladungen.
- Bewegte elektrische Ladungsträger nennt man elektrischen Strom.
- Elektrische Ladungsträger erzeugen elektrische Felder.
- Elektrische Ströme erzeugen magnetische Felder.
- Zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugen magnetische Felder.
- Zeitlich veränderliche magnetische Felder erzeugen elektrische Felder.

Eine derartige Beschreibung heißt *Modell*. Ein Modell ist ein mehr oder weniger stark vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit. Jedes Modell hat einen abgegrenzten Geltungs- und Anwendungsbereich. Wird dieser Bereich überschritten, so liefert das Modell falsche Ergebnisse. Andererseits ist es oftmals sinnvoll, eingeschränkte Modelle zur Lösung bestimmter Aufgaben zu verwenden, da ein umfangreiches Modell viel zu komplex ist und Lösungen nur mit unangemessen hohem Aufwand zu erzielen sind.

Das oben dargestellte Modell eignet sich bestenfalls zur groben Betrachtung prinzipieller Verhaltensweisen. Genauere Untersuchungen oder sogar theoretische Beschreibung sind daraus nicht abzuleiten.

Das wichtigste Werkzeug der Physik ist die Mathematik. Nun ist es nicht so, dass die Physik mit Mathematik funktioniert. Physikalische Vorgänge verhalten sich so, wie sie sich verhalten. Vielmehr bietet die Mathematik Möglichkeiten, dieses Verhalten sehr präzise zu beschreiben. Jede physikalische Formel ist ein mathematisches Modell des realen Vorganges mit allen Vorteilen und Einschränkungen, die Modellen zu eigen sind.

## ■ 1.2 Skalare und vektorielle Größen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden einige physikalische Größen eingeführt und mit Begriffen wie z. B. Ladung oder Strom bezeichnet. Für eine kompakte Darstellung von physikalischen Zusammenhängen ist die Verwendung von Begriffen allerdings zu unhandlich. Diese werden daher durch einfache Zeichen (meist lateinische oder griechische Buchstaben) ersetzt. So wird für den Begriff Ladung im Allgemeinen das Formelzeichen  $Q$  und für den Begriff Strom  $I$  verwendet. In vielen Fällen haben sich zunächst willkürlich gewählte Formelzeichen durchgesetzt. Teilweise sind sie auch aus den Begriffen abgeleitet worden, wie z. B. bei der Leistung  $P$  (von *power*).

Zur quantitativen Erfassung der Größen ist es notwendig, diese mit einem Referenzwert zu vergleichen. Dieser Referenzwert ist die *Einheit*, die für jede physikalische Größe festgelegt ist. Die Einheit des Stromes ist das Ampere. Fließt also der 5,3-fache Strom der Einheit Ampere durch einen Leiter, so sagt man: Der Strom beträgt 5,3 Ampere oder kurz

$$I = 5,3 \text{ A}.$$

Jede Größenangabe wird als Produkt aus einem Zahlenwert und einer Einheit angegeben.

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

Referenzieren wir auf Einheiten, so setzen wir die betreffende Größe in eckige Klammern.

$$[\text{Größe}] = \text{Einheit} \quad \text{bzw.} \quad [I] = \text{A} \quad \text{oder} \quad [I] = 1 \text{ A}$$

Auch für die Einheiten gelten die Regeln der Mathematik, d. h., zwei Größen mit unterschiedlichen Einheiten können nicht addiert werden. Die Summe  $I + Q$  ist daher sinnlos. Bei Produkten oder Quotienten von Größen werden auch die Einheiten multipliziert bzw. dividiert. Auf diese Weise leiten sich zusammengesetzte Einheiten ab.

Das Internationale System (SI) legt einige physikalischen Größen als Grundgrößen und deren Basiseinheiten fest. Alle anderen Größen lassen sich aus den Grundgrößen ableiten. In der Elektrotechnik wird neben den SI-Grundgrößen Länge, Zeit, Masse und Stromstärke praktischerweise die abgeleitete Größe Spannung wie eine Grundgröße verwendet.

In der Netzwerktheorie werden zeitunabhängige Größen durch Großbuchstaben und zeitabhängige Größen durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Gleichstrom ist über die Zeit konstant, als Formelzeichen wird  $I$  verwendet. Wechselstrom ist eine zeitabhängige Größe. Daher wird das Formelzeichen  $i$  verwendet bzw. die Form  $i(t)$  gewählt, um den Strom  $i$  als Funktion der Zeit  $t$  darzustellen.

Wir unterscheiden zwischen *skalaren Größen*, die durch die Angabe eines Zahlenwertes und einer Einheit vollständig beschrieben sind, und *vektoriellen Größen*, die zusätzlich eine Richtung besitzen. Vektoren werden durch einen Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet.

Ladung und Strom sind ungerichtete Größen. Bei der Kraft (ebenso wie bei der elektrischen und magnetischen Feldstärke) ist neben dem Absolutwert die Wirkrichtung von entscheidender Bedeutung. Vektorielle Größen können immer in voneinander unabhängige Komponenten zerlegt werden, die praktischerweise den Grundrichtungen des verwendeten Koordinatensystems entsprechen.

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \qquad |\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Der Betrag des Vektors ist dann die Größe, die in der Richtung des Vektors wirkt (oder genau entgegengesetzt). Oftmals ist diese skalare Darstellung ausreichend.

Obwohl der Strom kein Vektor ist, muss die Richtung, in die er fließt, gekennzeichnet werden. Unter Richtung versteht man in diesem Fall den Weg entlang eines elektrischen Leiters. Es gibt daher nur eine Richtung und eine Gegenrichtung. Die Kennzeichnung erfolgt durch einen *Zählpfeil*. Ein Strom, der entgegen der Zählpfeilrichtung fließt, ist negativ.

Auf *Feldgrößen* soll an dieser Stelle nur kurz eingegangen werden. Unter einem Feld versteht man eine räumlich verteilte Größe, d. h., jedem Punkt im Raum ist ein Wert (Skalarfeld) bzw. ein Wert und eine Richtung (Vektorfeld) zugeordnet. Im allgemeinsten Fall ist die Größe abhängig vom Ort und von der Zeit.

## 1.3 Mathematische Modelle in der Elektrotechnik

Die umfassendste Beschreibung des Elektromagnetismus liefern die Maxwell'schen Gleichungen.<sup>3</sup> Die beiden Darstellungen *Integralform* und *Differenzialform* sind äquivalent. Welche Form zur Anwendung kommt, hängt von der Aufgabenstellung und der Lösungsmethode ab.

Integralform

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oiint_A \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Differenzialform

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Auf die Gleichungen soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Es sei hier nur Folgendes erwähnt:  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  beschreiben das elektrische und  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  das magnetische Feld. Der Strom wird durch die Stromdichte  $\vec{J}$  und die Ladung durch die Ladungsdichte  $\rho$  ausgedrückt. Die Differenzialoperatoren  $d/dt$  bzw.  $\partial/\partial t$  bezeichnen zeitliche Veränderungen. Die Differenzialoperatoren „rot“ und „div“ in der Differenzialform stellen Ableitungen nach den Ortsvariablen dar.

Die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des (leeren) Raums sowie der darin enthaltenen Stoffe werden durch die Materialgleichungen beschrieben.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \text{Permittivität}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{Permeabilität}$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad \kappa \quad \text{Leitfähigkeit}$$

Die Lorentzkraft<sup>4</sup> schließlich beschreibt die Kraft  $\vec{F}$ , die ein elektrisches oder ein magnetisches Feld auf eine Ladung  $Q$  ausübt. Hierbei ist  $\vec{v}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen Ladung und Magnetfeld.

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Der hier dargestellte Formelsatz lässt sich auch ohne tiefere mathematische Kenntnisse direkt mit der eingangs aufgestellten „Verhaltensliste des Elektromagnetismus“ vergleichen. Jeder Listeneintrag findet sich in den Formeln wieder.

<sup>3</sup> James Clerk Maxwell, englischer Physiker, 1831–1879.

<sup>4</sup> Hendrik Antoon Lorentz, holländischer Physiker, 1853–1928.

Zur Anwendung des *Maxwell'schen Modells* werden zunächst die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des betrachteten Raums beschrieben, d. h., es werden Raumbereiche definiert, denen eine bestimmte *Permittivität*, eine bestimmte *Permeabilität* und eine bestimmte *Leitfähigkeit* zugeordnet sind. Je nach Umfang der zu untersuchenden Anordnung kann allein diese Beschreibung schon sehr komplex werden. Ferner ist noch die Ladungsverteilung vorzunehmen. Dabei wird definierten Raumbereichen eine Ladungsdichte zugeordnet. Schließlich ist der anfängliche Zustand der Feldverteilung anzugeben. Nun kann mit der Lösung der Integrale begonnen werden. Aufgrund der beschriebenen Vorgehensweise ist leicht ersichtlich, dass eine geschlossene analytische Lösung nur für sehr einfache Anordnungen angegeben werden kann. Numerische Lösungen (z. B. mit der Methode der finiten Elemente) sind auch bei komplizierten Anordnungen berechenbar, erfordern z. T. aber eine extrem hohe Rechenleistung.

Schon die Berechnung eines einfachen Stromkreises, beispielsweise einer Lampe, die mit zwei beliebig durch den Raum gezogenen Drähten an einer Batterie angeschlossen ist, führt zu unvermeidbar hohem Aufwand. Hinzu kommt, dass schon das Verbiegen eines Drahtes eine vollständig neue Beschreibung erfordert. Dabei hat die Lage des Drahtes keinen praktischen Einfluss auf die Funktion des Stromkreises, lediglich die Feldverteilung im umgebenden Raum ändert sich ein wenig.

Mit diesem Beispiel wird ersichtlich, dass die Maxwell'schen Gleichungen, obwohl sie alle physikalischen Vorgänge in der Anordnung beschreiben, nicht zur Lösung dieses Problems geeignet sind. Das Modell „Maxwell'sche Gleichungen“ ist für diese Aufgabe gültig, praktisch aber kaum anwendbar. Die Maxwell'schen Gleichungen kommen in der Elektrostatik, der Magnetostatik und der Elektrodynamik zur Anwendung.

In der Netzwerktheorie wird ein Modell eingesetzt, dass aus dem *Ohm'schen Gesetz*<sup>5</sup> und den *Kirchhoff'schen Regeln*<sup>6</sup> besteht. Netzwerke (Schaltungen) werden durch Zeichnungen, sogenannte Schalt- oder Stromlaufpläne, beschrieben. Hierbei werden Schaltelemente durch elektrische Leiter miteinander verbunden. Die physikalische Lage der Schaltelemente im Raum spielt dabei keine Rolle. Jedes Schaltelement wird durch eine Beziehung zwischen Strom  $I$  und Spannung  $U$  charakterisiert.

Der *Strom* ist die bewegte Ladungsmenge pro Zeiteinheit und bereits aus dem Maxwell'schen Modell bekannt. (Dort wird der Strom allerdings auf die durchdrungene Fläche bezogen und als Stromdichte bezeichnet.)

Die *Spannung* ist eine Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten in einem elektrischen Feld, d. h. die Feldstärke längs einer Strecke zwischen den beiden Punkten. (Anders ausgedrückt: Die Feldstärke ist die auf den Abstand bezogene Spannung zwischen zwei Punkten.)



### Strom und Spannung

- Strom fließt durch einen Leiter (oder ein Bauelement).
- Spannung liegt zwischen zwei Punkten (z. B. über einem Bauelement) an.

Strom und Spannung sind keine gerichteten Größen (wie z. B. die Feldstärken), ihnen werden jedoch Zählpfeile zugeordnet. Ein negativer Wert bedeutet dann lediglich dass eine Spannung

<sup>5</sup> Georg Simon Ohm, deutscher Physiker, 1789–1854.

<sup>6</sup> Robert Kirchhoff, deutscher Physiker, 1824–1887.

entgegen der Zählpfeilrichtung anliegt. Im Falle eines negativen Stromes erfolgt die Bewegung von (positiven) Ladungsträgern entgegen der Zählpfeilrichtung. Auf die tatsächlichen Vorgänge in einem Leiter sowie die Definition der „technischen Stromrichtung“ wird in den Abschnitten 1.4.3 und 1.5 genauer eingegangen.

Das Verhältnis von Spannung zu Strom in einem Schaltkreis wird als elektrischer Widerstand  $R$  bezeichnet und beschreibt gleichzeitig ein Bauelement, durch das beim Anlegen einer Spannung ein bestimmter Strom fließt. Dieser Zusammenhang wird durch das Ohm'sche Gesetz

$$R = \frac{U}{I} \quad (1.1)$$

beschrieben.



### Ohm'sches Gesetz

Der Quotient von Spannung und Strom an einem Widerstand ist konstant.

Die Kirchhoff'schen Regeln beziehen sich auf die Netzwerktopologie und bestehen aus der Knoten- und der Maschengleichung. Ein *Knoten* ist ein beliebiger Stromverzweigungspunkt. Eine *Masche* ist eine beliebige Verbindung von Spannungszählpfeilen zu einem geschlossenen Umlauf.

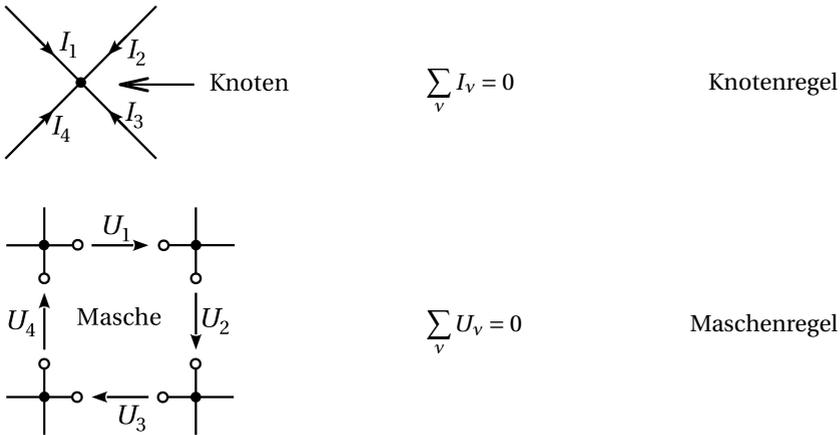
### Kirchhoff'sche Regeln

- Knotenregel: Die Summe der Ströme in einem Knoten ist null.
- Maschenregel: Die Summe der Spannungen in einer Masche ist null.

Zur Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln muss, wie in Bild 1.1 dargestellt, die Zählpfeilrichtung berücksichtigt werden. In einen Knoten hineinfließende Ströme werden positiv und aus dem Knoten herausfließende Ströme werden negativ gezählt. Entsprechendes gilt für die Spannungen: Je nachdem, ob eine Spannung beim Umlauf durch eine Masche in Zählpfeilrichtung oder entgegengesetzt durchlaufen wird, wird diese positiv oder negativ gezählt.

Der Schaltkreis in Bild 1.2 beschreibt eine sehr einfache Anordnung von zwei Bauelementen. Dort ist eine *Glühlampe* an einer Batterie angeschlossen. Diese Schaltung enthält eine einzige Masche und keinen Knoten. Die räumliche Anordnung der Bauelemente wird in dem Modell nicht berücksichtigt. Die Verbindungsleitungen beschreiben nur die Verschaltung der Bauelemente, nicht aber die Einflüsse der verwendeten Drähte bzw. Leitungen. Somit stellt die Schaltung eine Situation dar, in der die Lampe unmittelbar (ohne die geringste räumliche Entfernung) an die Spannungsquelle angeschlossen ist. Nun werden ein paar kurze Drähte kaum einen Einfluss haben. Wird jedoch ein sehr langes Kabel zwischen Batterie und Lampe geschaltet, so wird deren Leuchtkraft deutlich geringer sein. Solche Einflüsse werden durch eine Ersatzschaltung des Kabels (in diesem Fall durch einen Widerstand) berücksichtigt. Eine Ersatzschaltung ist wiederum ein Modell für eine komplexere Struktur. Auf diese Weise können die realen Verhältnisse durch Kombination idealer Bauelemente je nach Anforderung sehr genau nachgebildet werden.

Das *Kirchhoff'sche Modell* hat aber auch Einschränkungen, die in vielen, nicht jedoch in allen Fällen durch Einbringen zusätzlicher Bauelemente behoben werden können.



**Bild 1.1** In einem Knoten kann kein Strom verschwinden, daher muss die Summe aller Ströme null sein. Ein vollständiger Umlauf in einer Masche erfasst alle anliegenden Spannungen. Unter Berücksichtigung ihrer Zählpfeilrichtung muss ihre Summe null sein.



**Bild 1.2** Elektrische Bauelemente werden durch Symbole dargestellt. Ihre Verschaltung ist durch Verbindungslinien festgelegt. Verbindungslinien sind keine Leitungen, insbesondere besitzen sie weder eine Ausdehnung noch einen Widerstand.

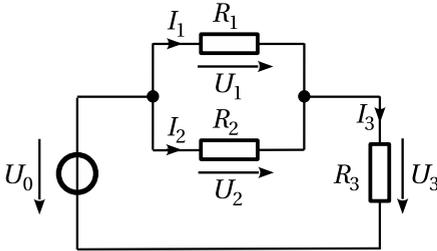
Eingangs hatten wir erörtert, dass jeder stromdurchflossene Leiter ein Magnetfeld ausbildet. Zum Aufbau dieses Feldes ist eine gewisse Energie erforderlich, die natürlich der Spannungsquelle entnommen wird. Dieses Verhalten bleibt im Kirchhoff'schen Modell anscheinend unberücksichtigt. Wie wir später noch sehen werden, lassen sich auch diese Effekte in das Modell einbringen, indem entsprechende (ideale) Bauelemente definiert werden.

Weiterhin ist z. B. der Kurzschluss einer idealen Spannungsquelle nicht erlaubt, da dann die Maschenregel nicht mehr erfüllt werden kann. (Wenn in einer Masche nur eine einzige Spannung vorkommt, so darf diese sich nicht von null unterscheiden.) Abhilfe schafft hier die Erweiterung des Modells „ideale Spannungsquelle“, die eine bessere Annäherung an eine reale Spannungsquelle darstellt.

Die beiden hier kurz angerissenen Modelle und ihre Anwendung werden wir im Anschluss an einige grundlegende Bemerkungen eingehend behandeln. Zuvor soll jedoch ein erstes Beispiel betrachtet und konkret berechnet werden.

**Beispiel 1.1 Schaltkreis mit Stromverzweigung**

Wir betrachten die in Bild 1.3 dargestellte Schaltung mit der Quellspannung  $U_0 = 10\text{ V}$  und den Widerständen  $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$  sowie  $R_3 = 500\ \Omega$ . Die Spannungen  $U_1, U_2$  und  $U_3$  sowie die Ströme  $I_1, I_2$  und  $I_3$  sollen bestimmt werden.

**Bild 1.3** Schaltkreis

Zur Lösung des Problems wenden wir die Knotenregel auf einen der beiden Knoten an und führen zwei Maschenumläufe über die Spannungen  $U_0, U_1, U_3$  sowie  $U_0, U_2, U_3$  aus. Damit finden wir ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ -U_0 + U_1 + U_3 &= 0 \\ -U_0 + U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned}$$

An den Widerständen gilt jeweils das Ohm'sche Gesetz. Damit verknüpfen wir die Spannungen mit den Strömen.

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 \\ U_2 &= R_2 I_2 \\ U_3 &= R_3 I_3 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen und Umformen des Gleichungssystems erhalten wir schließlich die gesuchten Spannungen und Ströme.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{R_1 R_2 U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 5\text{ V} & I_1 &= \frac{R_2 U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 5\text{ mA} \\ U_2 &= \frac{R_1 R_2 U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 5\text{ V} & I_2 &= \frac{R_1 U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 5\text{ mA} \\ U_3 &= \frac{R_3 (R_1 + R_2) U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 5\text{ V} & I_3 &= \frac{(R_1 + R_2) U_0}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 10\text{ mA} \end{aligned}$$

■

Die Berechnung von Spannungen und Strömen in einem relativ kleinen Netzwerk scheint auf den ersten Blick recht kompliziert zu sein. Wir werden jedoch Methoden kennenlernen, die dieses Problem deutlich vereinfachen. Ein wesentlicher Punkt wird dabei die systematische Analyse von Netzwerken sowie die Behandlung linearer Gleichungssysteme sein. Außerdem lassen sich mehrere Widerstände mit einfachen Regeln zu einem einzigen zusammenfassen und verringern damit die Komplexität einer Schaltung.

## ■ 1.4 Elektrische Ladung und Potenzial

Strom und Spannung sind für die technische Anwendung der Elektrizität fundamentale Größen. Sie lassen sich messtechnisch sehr einfach und mit großer Präzision erfassen. Eine Betrachtung elektrischer Ladungen, der Kräfte zwischen diesen Ladungen sowie deren Bewegungen ist die Grundlage zur Definition von Strom und Spannung.

### 1.4.1 Elementarladung

Die elektrische Ladung ist die Ursache des Elektromagnetismus und eine Grundeigenschaft der Materie. Elektrische Ladung tritt nur in quantisierter Form als ganzzahliges Vielfaches der *Elementarladung*

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.2)$$

auf,<sup>7</sup> d. h., für jede Ladungsmenge  $Q$  gilt

$$Q = n \cdot e, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

Die Einheit der elektrischen Ladung ist das Coulomb<sup>8</sup> (C). Das Coulomb ist eine zusammengesetzte Einheit. Ein Coulomb ist die Ladungsmenge, die von einem Strom der Stärke ein *Ampere*<sup>9</sup> in einer Sekunde transportiert wird.

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ Sekunde} \quad 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

Elektrisch nicht neutrale Elementarteilchen werden als *Ladungsträger* bezeichnet. In der Elektrotechnik sind nur Elektronen und Protonen von praktischer Bedeutung.

*Protonen* sind positiv geladen ( $e^+ = +e$ ) und bilden (zusammen mit elektrisch neutralen Neutronen) den Atomkern. *Elektronen* sind negativ geladen ( $e^- = -e$ ) und bilden die Atomhülle. Ein vollständiges Atom besitzt genau so viele Elektronen wie Protonen. Es ist nach außen elektrisch neutral. Das Bohr'sche<sup>10</sup> Atommodell lässt nur bestimmte Elektronenbahnen zu. Eine bestimmte Zahl von Elektronenbahnen lässt sich zu jeweils einer Schale zusammenfassen. Jede Schale kann nur eine maximale Anzahl an Elektronen aufnehmen. Es zeigt sich, dass eine vollbesetzte äußere Elektronenschale der energetisch günstigste Zustand eines Atoms ist. Atome, die nur ein Elektron auf ihrer äußeren Schale haben, geben dieses bei Energiezufuhr relativ leicht ab. Andererseits nehmen Atome, denen lediglich ein Elektron zu einer vollbesetzten äußeren Schale fehlt, begierig freie Elektronen auf. Derartige Elemente sind daher chemisch sehr reaktionsfreudig.

Metalle weisen sich durch eine nur schwach besetzte äußere Schale auf. Die Elektronen auf dieser Schale nennt man auch *Valenzelektronen*. Sie sind nur sehr schwach an den Kern gebunden bzw. bewegen sich ungeordnet zwischen den Atomen. Valenzelektronen können mit

<sup>7</sup> Quarks werden Dritteladungen zugeschrieben; sie treten aber nie isoliert auf, sondern immer nur in Kombinationen, deren Gesamtladung ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung ist.

<sup>8</sup> Charles Augustin de Coulomb, französischer Physiker, 1736–1806.

<sup>9</sup> André-Marie Ampère, französischer Naturforscher, 1775–1836.

<sup>10</sup> Niels Bohr, dänischer Physiker, 1885–1962.

geringer Energiezufuhr gerichtet bewegt werden. Diese Form des Ladungstransports heißt metallische Leitung.

Ist die Anzahl von Elektronen und Protonen eines Atoms nicht ausgeglichen, so spricht man von einem *Ion*. Je nachdem, ob ein Überschuss oder ein Mangel an Elektronen besteht, ist das Ion positiv oder negativ geladen. In leitenden Flüssigkeiten und angeregten Gasen (Plasma) erfolgt der Ladungstransport durch gerichtete Bewegung von Ionen.

Die Gesamtladung eines Raumbereichs ist gegeben durch die Summe der einzelnen Elementarladungen. Bei einer makroskopischen Betrachtung setzt sich die Gesamtladung aus einer sehr großen Zahl von Elementarladungen zusammen, sodass sich deren diskrete Natur nach außen nicht mehr bemerkbar macht. Die Ladungsverteilung in einem Volumen kann daher durch Betrachtung der Ladung  $dQ$  in einem infinitesimalen Volumenelement  $dV$  als *Raumladungsdichte*

$$\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad (1.4)$$

beschrieben werden. Die im Volumen  $V$  eingeschlossene Gesamtladung ist dann gegeben durch das Integral

$$Q = \iiint_V \varrho dV. \quad (1.5)$$

## 1.4.2 Kraftwirkung

Die Wirkung von elektrischen Ladungen lässt sich durch die Kraft beobachten, die sie aufeinander ausüben. Zwei im Abstand  $d$  positionierte punktförmige Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  stoßen sich mit der Kraft

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2} \quad (1.6)$$

ab, wobei die Permittivität  $\epsilon$  (auch Dielektrizitätskonstante genannt) den Einfluss der umgebenden Materie beschreibt. Die Permittivität des leeren Raums  $\epsilon_0$  ist eine Naturkonstante und beträgt

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}. \quad (1.7)$$

Jedes nicht leitende Material erhöht die Permittivität um einen bestimmten materialtypischen Faktor, der relative Permittivität genannt wird. Wie man sofort erkennt, wird die Kraft bei Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen negativ, d. h., unterschiedliche Ladungen ziehen sich an. Die Kraft nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.

Die elektrostatische Kraftwirkung ist um ein Vielfaches (etliche Zehnerpotenzen) größer als die Gravitationskräfte. Um dies zu verdeutlichen, wollen wir die Kräfte vergleichen, die zwei Protonen im ansonsten leeren Raum aufeinander ausüben. Aus Gleichung (1.6) ergibt sich bei einem Abstand  $d$  der Teilchen eine abstoßende elektrostatische Kraft

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

# Index

- Abgleichbedingung, 106
- Additivität, 192
- Adjunkte, 279
- Admittanz, 79, 132
  - Parallelschaltung, 86
- Admittanzmatrix, 211
- Akkumulator, 118, 160
- Ampere, 23
- Amplitude, 132
  - komplexe, 59, 228
- Amplitudengang, 137, 154
- Anfangswertproblem, 230, 239, 244, 283, 286, 290, 294
- Anionen, 35
- Anode, 35
- Arbeit, 160
- Argument, 272
- Audiotechnik, 139, 171
- Augenblicksleistung, 160
- Augenblickswert, 52
- Ausgangsadmittanz, 212
- Ausgangsgröße, 132
- Ausgangsimpedanz, 209
- Ausgangsklemmen, 121
- Ausgangsspannung, 132
  
- Bandbreite, 95, 102, 150, 152
- Bandpassfilter, 148
- Bandsperfilter, 150
- Batterie, 20, 118, 160
- Bauelement
  - ideal, 72
  - real, 72
- Baum, 181
  - sternförmiger, 188
- Baumzweig, 181
- Betrag, 272, 275
- Betragsquadrat, 272
- Betriebsspannung, 78
- Betriebszustand, 122, 166
  
- Bewegungsenergie, 162
- Bezugsknoten, 188, 193
- Bezugssystem, 171
- Blindleistung, 162, 163
- Blindleistungskompensation, 163
- Blindleitwert, 79, 80
  - induktiver, 80
  - kapazitiver, 80
- Blindwiderstand, 79
  - induktiver, 76, 79
  - kapazitiver, 74, 79
- Bode-Diagramm, 137, 153
- Brandschutztür, 166
- Brücke, abgegliche, 106
- Brückenschaltung, 106, 111
  
- Dämpfung, 133, 152
- Dämpfungsmaß, 134
- Dämpfungspol, 152
- Dämpfungsverlauf, 136
- Darstellung
  - kartesische, 135, 270
  - logarithmische, 133, 169
- Dekade, 137
- Determinante, 278
- Dezibel, 133
- Dielektrikum, 115
- Differenzialgleichung, 282
  - homogene, 230, 239, 282, 288
  - inhomogene, 232, 241, 283, 291
  - lineare, 228, 282
  - zweiter Ordnung, 288
- Dimension, 274
- Doppelader, 166
- Doppelpotenzmesser, 110
- Drehzeiger, 58, 59
- Dreieck-Stern-Umrechnung, 112, 113
- Dreieckfunktion, 66
- Dreieckimpuls, 66
- Dreieckschaltung, 111

- Dreiecksignal, 67
- periodisches, 67
- Dreipol, 111
- Driftgeschwindigkeit, 31
- Dualität, 98, 114
- Durchflutung, magnetische, 77
- Durchlassbereich, 140
- Dynamo, 118, 160
  
- Effektivwert, 54, 59, 80, 84
- Eingangsadmittanz, 212
- Eingangsgröße, 132
- Eingangsimpedanz, 209
- Eingangsspannung, 132
- Einheit, 17
- Einheitsmatrix, 275
- Einheitsvektor, 275
- Eisenkern, 79
- Elektromagnet, 166
- Elektronen, 23
- Elektronengeschwindigkeit, 35
- Element, 274
- Elementarladung, 23
- Empfänger, 166
- Empfindlichkeit, 106
- Energie, 160
  - chemische, 118
  - elektrische, 118
  - mechanische, 118
  - thermische, 118
- Energetechnik, 163, 166
- Energieumsetzung, 162
- Energiewandler, 160
- Erhaltungsgröße, 15
- Ersatzquelle, 123
- Erweiterung, konjugiert komplexe, 272
- Euler'sche Formel, 62, 273
- Euler'sche Zahl, 133
  
- Farad, 73
- Farbcodierung, 40
- Feld
  - elektrisches, 15, 30
  - magnetisches, 15
- Feldgröße, 17
- Feldstärke
  - elektrische, 30
  - magnetische, 48
- Filter, 139
  - elektrisches, 132
- Filterordnung, 139
- Filterschaltung, 139
- Flüssigkeit, 35
- Fluss, magnetischer, 75
- Flussdichte, magnetische, 48
- Form, kartesische, 135
- Fotodiode, 37
- Frequenzachse
  - lineare, 153
  - logarithmische, 137, 153
- Frequenzband, 148, 150
- Frequenzbereich, 152
- Frequenzgenerator, 139
- Frequenzmessbrücke, 110
- Frequenzmessung, 110
- Frequenzselektivität, 132
- Frequenzstützpunkt, 197
- Frequenzstützstellen, 152
  
- Galvanisches Element, 118
- Gasanzünder, 118
- Gegeninduktivität, 77
- Generator, 118, 160
- Germanium, 37
- Gleichanteil, 66
- Gleichrichtwert, 55
- Gleichungssystem, 84, 178, 181, 185, 189
  - lineares, 281
- Glühlampe, 20
- Grafit, 37
- Graph, 179
  - gerichteter, 179
- Grenzfrequenz, 95, 102, 135, 140, 144, 150, 234
  - obere, 95, 102
  - untere, 95, 102
- Grenzkreisfrequenz, 93, 101, 135, 234
  - obere, 93, 102
  - untere, 93, 102
- Größe
  - skalare, 17
  - vektorielle, 17
- Güte, 96, 103, 116, 117

- Hauptdiagonale, 275  
 Hauptdiagonalelemente, 275, 278  
 Henry, 75  
 Hertz, 56  
 Hochfrequenztechnik, 171  
 Hochpasscharakteristik, 238  
 Hochpassfilter, 144, 146  
 Hybridmatrix, 215  
 Hybridparameter, 215  
  
 Imaginärteil, 269, 272  
 Impedanz, 79, 132  
 – Parallelschaltung, 87  
 – Reihenschaltung, 85  
 Impedanzmatrix, 208  
 Impedanztransformation, 223  
 Induktion, 118  
 Induktivität, 75, 108, 114, 132  
 – Ausschaltvorgang, 239  
 – Einschaltvorgang, 241  
 – Gegeninduktivität, 77  
 – Parallelschaltung, 88  
 – Reihenschaltung, 86  
 – Selbstinduktivität, 77  
 Induktivitätsmessbrücke, 108  
 Innenimpedanz, 119, 123  
 Innenwiderstand, 106, 119  
 Ion, 24, 31, 35  
 Ionenleitung, 35  
  
 Kaltleiter, 33  
 Kapazität, 73, 109, 114, 132  
 – einstellbare, 109  
 – Entladevorgang, 230  
 – Ladevorgang, 231  
 – Parallelschaltung, 88  
 – Reihenschaltung, 86  
 Kapazitätsmessbrücke, 109  
 Kathode, 35  
 Kationen, 35  
 Kettenmatrix, 213  
 Kettenparameter, 213  
 Kirchhoff'sche Regeln, 19, 62, 119, 152, 177, 228  
 Kirchhoff'sches Modell, 20, 52, 72  
 Klemme, 111  
 Knoten, 20, 177  
 Knotenadmittanzmatrix, 189, 193  
 Knotengleichung, 180  
 Knotenleitwertmatrix, 189  
 Knotenpotenzialverfahren, 183, 188, 193  
 Knotenregel, 183  
 Kohlenstoff, 36  
 Kommutativgesetz, 278  
 Kompensation, 119  
 Komplement, algebraisches, 279  
 Komplementärbaum, 181  
 Komponentendarstellung, 270  
 Kondensator, 73, 115  
 – idealer, 115  
 – realer, 115  
 – unbekannter, 109  
 Konduktanz, 80  
 Konjugation, 271, 276  
 Konstantstrom, 120  
 Kopplung  
 – feste, 77  
 – galvanische, 77  
 – magnetische, 77, 222  
 Kopplungssymmetrie, 218  
 Kreisfrequenz, 56  
 Kreuzprodukt, 277  
 Kristall, 118  
 Kurzschluss, 119, 166, 192, 212  
 Kurzschlussfestigkeit, 119  
 Kurzschlusskernadmittanz, 212  
 Kurzschlussstrom, 121, 123  
  
 Ladung, 15  
 Ladungsträger, 23  
 Ladungstrennung, 118  
 Lampe, 42  
 Lastbereich, 119  
 Lastimpedanz, 119, 163  
 Laststrom, 119  
 Lastunabhängigkeit, 119  
 Lastwiderstand, 119, 133  
 Leerlauf, 119, 166, 192, 209  
 Leerlaufkernimpedanz, 209  
 Leerlaufspannung, 121, 123  
 Leistung, 159  
 – eingespeiste, 79  
 – entnommene, 79  
 – komplexe, 162

- mittlere, 160
- Leistungsanpassung, 165, 166
- Leistungsfaktor, 161, 163
- Leistungsverhältnis, 133
- Leiter, 75
  - metallischer, 31
- Leitfähigkeit, 19
- Leitwert, 32
  - komplexer, 80
  - spezifischer, 32
- Lichterkette, 166
- Lichtgeschwindigkeit, 35
- Linearkombination, 208
- Lösung, 35
  
- Magnetfeld, 75, 77, 118
- Magnetisierungsverluste, 79, 116
- Masche, 20, 177
- Maschengleichung, 180
- Maschenimpedanzmatrix, 185, 193
- Maschenregel, 183
- Maschenstromverfahren, 183, 184
- Maschenwahl, 181
- Maschenwiderstandsmatrix, 185
- Maschenzweig, 181
- Maßstab
  - linearer, 139
  - logarithmischer, 133
- Matlab, 258
- Matrix, 185, 189, 208, 261, 274
  - inverse, 279
  - quadratische, 275
- Matrixinversion, 185, 189, 193, 280, 281
- Matrixmultiplikation, 277
- Matrizenschreibweise, 185, 189
- Maxwell'sches Modell, 19
- Maxwell-Wien-Brücke, 108
- Mehrpole, 205
- Mehrtor, 205
- Messbereich, 107, 109
- Messgerät, 106
- Messnormal, 109
- Messtechnik, 106, 139
- Metall, 31, 35
- Mittelwert, 53, 66, 161
- Mittenfrequenz, 148, 150
- Modell, 16
  
- Motor, 163
- Multimeter, 84
  
- Nachrichtentechnik, 166
- Näherung, erste, 115
- Nebendiagonale, 278
- Nebendiagonalelemente, 278
- Nennwert, 115
- Neper, 133
- Netzgerät, stabilisiertes, 119
- Netzliste, 193
- Netzteil, stabilisiertes, 119
- Netztransformator, 78
- Netzwerk, 177, 193
  - lineares, 192, 228
- Netzwerkanalyse, 106, 178, 192, 193, 228
- Nichtleiter, 36
- Norm, 275, 277
- Normierung, 82, 166, 169
- Normreihe, 40
- Nullindikator, 106
- Nullphasenwinkel, 56
- Nullstelle, 152
- Nyquist-Diagramm, 138, 156
  
- Octave, 194, 258, 280, 282
- Octave-Skript, 261
- Ohm, 33
- Ohm'sches Gesetz, 19, 38, 72, 152
- Ortskurve, 138
  
- Parallel-Reihen-Matrix, 217
- Parallel-Reihen-Parameter, 217
- Paralleleitwert, 116
- Parallelschaltung, 86, 120, 166
- Parallelschwingkreis, 98, 150
- Parallelwiderstand, 109
- Parameterdarstellung, 139
- Passivität, 206
- Pegel, 169
- Periode, 52
  - primitive, 52, 66
- Periodendauer, 161
- Permanentmagnet, 118
- Permeabilität, 19, 45
- Permittivität, 19, 115
- Phase, 72, 74, 76, 132, 133, 152

- Nichtexistenz, 146, 152
- Phasengang, 137, 154
- Phasensprung, 152
- Phasenverlauf, 136
- Phasenverschiebung, 74, 76, 80, 90
- Piezo-Element, 118
- Polardarstellung, 115, 117, 270
- Polstelle, 152
- Potenzial, 28
- Potenziometer, 42, 107, 109
  - gekoppelte, 110
- Primärspannung, 78
- Primärspule, 78
- Primärstrom, 78
- Probeladung, 29
- Protonen, 23
- Prozess
  - irreversibel, 118
  - reversibel, 118
- Pseudoeinheit, 133
- Pulsweitenmodulation, 66
  
- Quarz, 118
- Quelle, 118, 139, 160
  - elektrische, 118
- Quellenparameter, 121
- Quellenumrechnung, 121, 122
- Quellenumwandlung, 186, 190
- Quellspannung, 119, 121, 123
- Quellspannungsvektor, 185–187
- Quellstrom, 121
- Quellstromvektor, 189, 190, 192, 194
- Querzweig, 106
  
- Raumladungsdichte, 24
- RC*-Glied, 134, 229
- Reaktanz, 79
- Realteil, 269, 272
- Rechenaufwand, 182
- Rechte-Hand-Regel, 48
- Rechteckfunktion, 64
- Rechteckimpuls, 64
- Rechtecksignal, 64
  - periodisches, 66
- Referenzgröße, 169
- Referenzleistung, 170
- Referenzpegel, 171
- Referenzspannung, 170
- Referenzwert, 133
- Referenzwiderstand, 170
- Reflexionsfaktor, 169
- Regelkreis, 137
- Regelung, 119
- Regelungstechnik, 137
- Reihenschaltung, 85, 119, 166
- Reihenschwingkreis, 92, 148
- Reihenwiderstand, 117
- Resistanz, 79
- Resonanz, 91, 163, 167
- Resonanzfrequenz, 93, 99, 103, 148, 150
- Resonanzkreisfrequenz, 92, 99
- Reziprozität, 218
- RL*-Glied, 238
  
- Sägezahnimpuls, 67
- Sägezahnsignal, 67
- Schalter, 65
- Schaltung, frequenzselektive, 132
- Schaltungsanalyse, 111
- Schaltvorgang, 65
- Scheinleistung, 163, 168
- Scheinleistungsanpassung, 168
- Scheinleitwert, 80, 84
- Scheinwiderstand, 79, 84
- Scheitelwert, 56, 59, 80
- Schering-Brücke, 109
- Schmelze, 35
- Schwingkreis, 91
- Schwingquarz, 118
- Schwingung, komplexe, 59
- Schwingungsformel, Thomson'sche, 93, 99
- Seebeck-Effekt, 118
- Sekundärspannung, 78
- Sekundärspule, 78
- Sekundärstrom, 78
- Selbstinduktivität, 77
- Selektivität, 141
- Sender, 166
- Senke, 139, 160
- Sensortechnik, 118
- Serienschwingkreis, 92
- Serienwiderstand, 108, 117
- Siemens, 32
- Signal, 52