

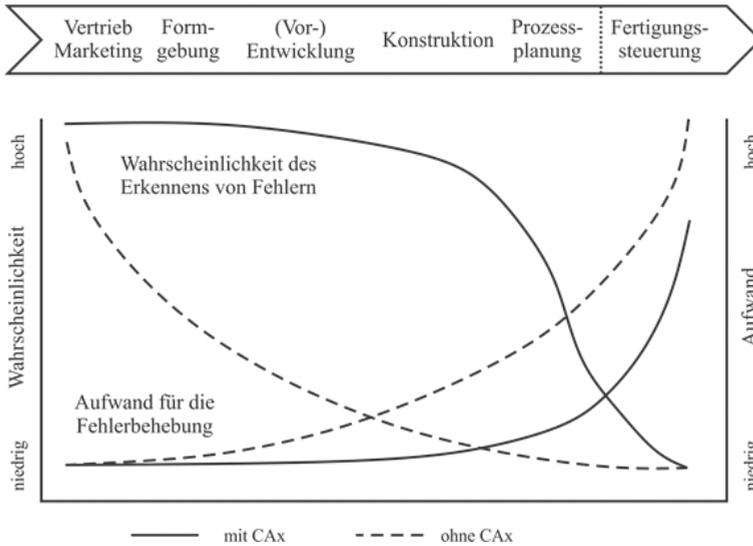
# 1

# Einführung in die Methode der Finiten Elemente

## ■ 1.1 Einleitung

Die verschiedenen Anwendungsgebiete wachsen durch den breiten Einsatz von CAx-Systemen mehr und mehr zusammen. So werden die Formgebung (Industriedesign) und das eigentliche Produkt zunehmend parallel entwickelt. Das spätere Nutzungsverhalten, die Wartungsfähigkeit und die Recyclingfähigkeit des Produktes stehen im Blickfeld der heute zunehmenden Diskussion um die Nachhaltigkeit von Produkten und werden zunehmend in Simulationen abgebildet. In der Mechatronik werden mechanische Elemente mit elektrischen, elektronischen und informationstechnischen Effekten und Objekten verbunden. Die Vielfalt und Anzahl mechatronischer Produkte nimmt stark zu, wie der Zuwachs an Produkten der Unterhaltungs- und der Kommunikationsindustrie eindrucksvoll zeigt.

Das Ziel bei der Verwendung der CAx-Technologien ist dabei immer, relevante Entscheidungen während der Entstehung eines Produktes zu einem möglichst späten Zeitpunkt und unter Berücksichtigung möglichst vieler Einflussfaktoren zu treffen. Erkenntnisse aus anderen Bereichen als der Produktentwicklung fließen dabei in den Entscheidungsprozess mit ein. Verschiedene Alternativen werden möglichst realitätsnah simuliert und bewertet (vgl. Bild 1.1). Durch den Einsatz von CAx-Technologien können wesentlich mehr potenzielle Fehlentwicklungen während der Produktentstehung früher erkannt werden. Die Behebung der Fehler ist mit geringerem Aufwand möglich als ohne den Einsatz von CAx-Technologien. Bild 1.1 verdeutlicht diesen Effekt [VWZ+18].



**Bild 1.1** Fehlererkennung und Fehlerbehebung (eigene Abbildung in Anlehnung an [VWZ+18])

## ■ 1.2 Anwendungsfelder der Finiten-Elemente-Methode

Grundsätzlich kann jede physikalische oder chemische Problemstellung durch eine Finite-Elemente-Methode betrachtet und gelöst werden, welche sich durch zeit- und ortsabhängige Differenzialgleichungen oder ein äquivalentes Variationsprinzip beschreiben lässt. Nachfolgend werden verschiedene bekannte Anwendungen zusammengestellt. Der Schwerpunkt der meisten Simulationen mittels FEM liegt dabei auf Festigkeitsproblemen, Potenzialanalysen und Multiphysikproblemen [Kle07]:

- lineare Elastostatik: Hooke'sches Materialverhalten ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ )
- nichtlineare Elastostatik: nichtlineares Materialverhalten (Plastizität)  
geometrisch nichtlineare Probleme (Instabilitätsprobleme, große Verschiebungen bei kleinen Dehnungen)  
impulsartige große Verformungen (Crash)  
Umformprozesse
- lineare Elastodynamik: Eigenschwingungen  
freie und erzwungene Schwingungen  
zufallserregte Schwingungen

- nichtlineare Elastodynamik: zeit- und verschiebungsabhängige Kräfte  
Stabilität, Kreiselbewegung
- Starrkörperdynamik: Mehrkörpersysteme (MKS)  
elastische Mehrkörpersysteme (EMKS)
- Elastohydrodynamik: Schmierfilm
- Ermüdungsfestigkeit: Schädigung, Lebensdauer, Rissbruch
- Aeroelastizität: elastisches Strukturverhalten unter Anströmung
- Wärmeübertragung: stationäre und instationäre Wärmeleitung
- Thermoelastizität: mechanische Beanspruchung unter hohen Temperaturen
- Flüssigkeitsströmungen: Sickerströmung, Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder
- Elektrotechnik: elektrisches Strömungsfeld, Magnet- und Wellenfelder
- Akustik: Schalldruckverteilung, Druckstöße
- Gießtechnologie: Spritz- und Druckgießen, Schwerkraftgießen
- Multiphysik: gekoppelte Strömung, Temperatur mit Elastik

Im Bereich der Elastostatik und der Elastodynamik werden entweder die Differentialgleichung des Gleichgewichts oder ersatzweise die Gleichheit der inneren und äußeren virtuellen Arbeit als Berechnungsgrundlage der Simulation gelöst und berechnet. Die analytische Lösung beider Gleichungen ist bei hinreichend komplexer Geometrie nicht mehr möglich. Die näherungsweise Lösung der Differentialgleichungen durch geeignete Ansätze ist jedoch möglich. Allerdings sind die Ergebnisse nicht mehr exakt. Sie stellen Näherungen an das exakte Ergebnis dar.

Die Verschiebungsgrößen-Methode wird in der Regel verwendet, wenn elastostatische und elastodynamische Probleme betrachtet werden. Die wirkenden Kräfte auf eine Struktur sind dabei bekannt. Unbekannt sind die daraus resultierenden Verschiebungen und Verformungen der Struktur. Das Verschiebungsverhalten der Elemente wird vorgegeben und das entstehende Gleichungssystem wird numerisch gelöst.

Möglich, aber unüblich ist ebenfalls die Anwendung der Kraftgrößen-Methode. Hier sind die Kräfte, die auf eine Struktur wirken, unbekannt. Häufig ist es einfacher, die wirkenden Kräfte zu ermitteln und zu beschreiben als die Verschiebungen, sodass sich die Verschiebungsgrößen-Methode weitestgehend in der Praxis durchgesetzt hat.

Die Finite-Elemente-Methode wird immer weiter entwickelt. Parallel steigt die Leistungsfähigkeit der Computersysteme, wodurch komplexere Systemmodellierungen, die Feldprobleme oder multiphysikalische Probleme behandeln, einen immer

größeren Stellenwert einnehmen und zunehmend breitere Anwendungsfelder erschlossen werden. So werden dynamische und elastodynamische Systeme zunehmend durch Mehrkörpersysteme und elastische Mehrkörpersysteme abgebildet. Feldprobleme stellen vor allem Probleme der Wärmeleitung, der Potenzialströmung und des Magnetismus dar. Diese lassen sich durch einen identischen Typ von Differenzialgleichungen beschreiben. Wärmeleitungsprobleme werden durch die Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung abgebildet. Bei Potenzialströmungen erfolgt die Verwendung der Poisson'schen Gleichung für Potenzialströmungen. Die Simulation magnetischer Kraftwirkungen ist mithilfe der Maxwell'schen Gleichung möglich. CFD-Programme (Computational Fluid Dynamics) können Strömungsprobleme in der Luft oder im Wasser oder in zähflüssigen Medien, wie Kunststoffen, abbilden [Kle07].

## ■ 1.3 Grundlagen der Modellbildung

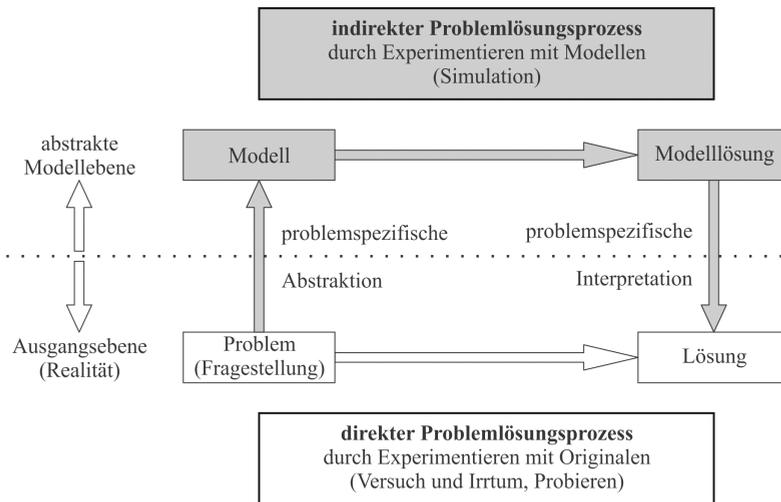
Ein wesentliches Prinzip des Systemdenkens besteht darin, Systeme und komplexe Zusammenhänge durch modellhafte Abbildungen zu veranschaulichen. Modelle sind Vereinfachungen und Abstraktionen der Realität. Sie zeigen deshalb auch nur notwendige Teilaspekte auf. Daher ist es wichtig, dass die Modelle genügend aussagefähig sind, was die Situation und die Problemstellung betrifft. Bei allen Überlegungen muss die Frage nach der Zweckmäßigkeit und der Problemrelevanz gestellt werden [DH02].

Die Modellbildung wird gezielt zur Lösung von Problemen genutzt. Dabei wird der Problemlösungsprozess von der Ausgangsebene (z. B. der Realitätsebene) auf eine abstrakte Ebene verlagert, sodass die Lösungsfindung in der Regel leichter ist. Auf der abstrakten Modellenebene werden Lösungen mithilfe abstrahierter Modelle gesucht und erarbeitet. Dabei ist das Ziel, dass die Lösung bzw. Interpretation des Modells eine möglichst hohe Relevanz (Validität, Gültigkeit) für die Lösung des ursprünglichen (originalen, z. B. realen) Problems hat. Die Modellbildung stellt also eine wichtige Problemlösungstechnik im Sinne einer zielgerichteten Vereinfachung dar, indem ein (nicht notwendigerweise reales) Original durch Abstraktion auf das Notwendige reduziert wird (vgl. Bild 1.2) [VWZ+18].

Im technischen und naturwissenschaftlichen Umfeld ist ein Realitätsbegriff notwendig, der die Möglichkeit zulässt, dass technische Gebilde real existieren und mindestens ein Teil der Wahrheit über deren Realität durch Messergebnisse repräsentiert werden kann. Ansonsten sind die Beobachtung von Regelmäßigkeiten und die Erstellung von Prognosen an diesen Gebilden nicht möglich. Die Wissenschaft übersetzt die durch Wahrnehmungen, Hypothesen und Modellierung beobachtete

Wirklichkeit in Symbole einer Theoriesprache, wie beispielsweise eine mathematische Formalisierung.

Im Zusammenhang mit Theorien aus den Hypothesen und Modellen entstehen wissenschaftliche Daten über diese Wirklichkeit. Die Daten erlangen ihre Bedeutung bzw. Interpretation jedoch erst in Verbindung mit den jeweiligen Hypothesen und Modellen [DH02].



**Bild 1.2** Direkte und indirekte Problemlösung durch problemspezifische Abstraktion (eigene Abbildung in Anlehnung an [VWZ+18])

### 1.3.1 Anforderungen an Modelle

Modelle müssen nah am Ausgangsobjekt oder der Ausgangssituation sein. Sie müssen die charakteristischen Eigenschaften enthalten, die den Untersuchungszweck beschreiben. Dabei sind vorgegebene Fehler in der Regel tolerierbar oder werden bewusst in Kauf genommen. In der Produktentwicklung ist der Modellzweck stark abhängig von der jeweiligen Lebensphase des Produkts, auf die sich die Untersuchung bezieht. Ein angemessenes Aufwand-/Nutzen-Verhältnis ist anzustreben. Der Detaillierungsgrad des Modells ist dabei eng verbunden mit dem Aufwand für die Modellierung und die nachfolgende Analyse. In vielen Fällen ist nicht nötig, eine sehr „genaue“ Modellierung, da die Unsicherheiten des detaillierten Modells so groß sein können, dass dessen Nutzen im Vergleich zu einem einfacheren Modell infrage gestellt werden muss. Ein Modell muss klar definiert, eindeutig beschreibbar, in sich widerspruchsfrei, redundanzfrei und handhabbar sein, um es für die Lösung einer bestimmten Aufgabe leicht einsetzen zu können [Rod06].

In einem gegebenen Gültigkeitsbereich muss das Verhalten eines Modells dem realen Systemverhalten entsprechen (Modellgültigkeit). Dieses Verhalten ist das Resultat aus den charakteristischen Eigenschaften der Modellelemente sowie deren Verknüpfungen untereinander. Wenn verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung eines Systems existieren, die den oben genannten Forderungen genügen, so sollte der einfachsten Möglichkeit der Vorzug gegeben werden (Modelleffizienz). Für die Erstellung eines einfachen, effizienten und gültigen Modells gibt es keine allgemeingültigen Regeln. Die Erfahrung und das Vorwissen des Modellbildners spielen daher eine große Rolle [VWZ+18].

### 1.3.2 Verfahren der Modellbildung

In der praktischen Anwendung von Modellen haben sich verschiedene Methoden der Modellbildung etabliert und durchgesetzt [Ise99, Rod06, HGP07].

#### Rechnerische Verfahren

Für rechnerische Verfahren werden mathematische Modelle benötigt, die durch algebraische Gleichungen, Differenzialgleichungen oder Ähnliches beschrieben werden. Für die Lösung der mathematischen Modelle stehen heute neben den traditionellen analytischen Verfahren leistungsfähige numerische und symbolische Softwareprogramme zur Verfügung. Der Vorteil der rechnerischen Verfahren besteht darin, dass weder reale Strukturen noch physikalische Modelle notwendig sind. Modellvarianten, beispielsweise durch konstruktive Veränderungen, können mit geringem Aufwand untersucht werden. Die Durchführung von Parameterstudien und Optimierungen ist vergleichsweise einfach. Die Idealisierungen und Vereinfachungen, die für die Modellbildung notwendig sind, wirken sich stark auf die Qualität der Ergebnisse aus.

Die rechnerischen Verfahren sind heute sehr weit entwickelt. Dennoch kann zur Absicherung der Gültigkeit der mathematischen Modelle nicht vollständig auf physikalische Experimente verzichtet werden. Die Optimierung von Produkten, Parameterstudien und das Aufstellen allgemeiner Zusammenhänge (Näherungslösungen) sind typische Anwendungsgebiete. Zur Anwendung werden CAX-Systeme wie FEM-Systeme, MKS-Simulationswerkzeuge, CAD-Systeme oder Computeralgebra-Werkzeuge verwendet.

#### Experimentelle bzw. messtechnische Verfahren

Experimentelle oder messtechnische Verfahren benötigen physikalische, gestalt-hafte Modelle für Experimente. An diesen können Versuche, Messungen und Auswertungen durchgeführt werden. Typischerweise sind dies Prototypen, Testobjekte, Versuchsanordnungen oder maßstäbliche Modelle, die häufig im Maschinenbau

verwendet werden. Durch den Einsatz physikalischer Modelle ist die messtechnische Erfassung aller wesentlichen Einflüsse möglich.

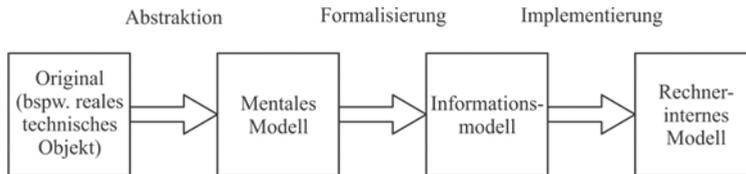
Messungen werden an der realen Struktur durchgeführt. Die aufgenommenen Signale werden nur durch eventuelle Messfehler beeinflusst. Es können nur direkt messbare Größen erfasst werden. Innere bzw. der Messtechnik unzugängliche Zustandsgrößen können bei Anwendung ausschließlich dieser Methode nicht erfasst werden. Sie bleiben verborgen, wodurch das Problem entsteht, dass das Gesamtsystem nur teilweise erfasst und beschrieben werden kann. Zum Erfassen von Zusammenhängen werden Parameterstudien durchgeführt. Diese erfordern einen großen Aufwand. Experimentelle oder messtechnische Verfahren werden vor allem bei Motorprüfständen, der Analyse von Prototypen, der Schwingungsüberwachung, der Schadensfrüherkennung und der Diagnose und der Verifikation rechnerischer Ergebnisse (Stichproben) angewendet.

### **Hybride Verfahren (Kombination von Berechnung und Experiment bzw. Messung)**

Diese Verfahren nutzen sowohl mathematische Modelle als auch Messgrößen. Bei rechnerischen Verfahren treten Fehler vor allem aufgrund von Modellierungsungenauigkeiten auf. Bei experimentellen Verfahren können mehr oder weniger große Messfehler nicht vermieden werden. Wenn Ergebnisse aus den mathematischen Verfahren und den experimentellen bzw. messtechnischen Verfahren vorliegen, so können Hypothesen über die Art der Fehler aufgestellt werden. Das Modell kann dann so verbessert werden, dass sich eine bessere Übereinstimmung von Rechnung und Experiment ergibt. Die daraus resultierenden hybriden Verfahren werden den Identifikationsverfahren zugeordnet und werden in Parameteridentifikation und Modellidentifikation unterschieden. Bei der Parameteridentifikation werden lediglich die Parameter eines bestehenden mathematischen Modells aus Messdaten rekonstruiert, während bei der Modellidentifikation die Messdaten (auch) zum Aufstellen eines mathematischen Modells selbst – einschließlich seiner Struktur – dienen. Diese Verfahren finden breite Anwendung in der Regelungstechnik und auch in der Qualitätskontrolle [VWZ+18].

Der Ablauf zur Entstehung eines rechnerinternen Modells für die Modellanalyse wird in Bild 1.3 zusammengefasst. Zuerst entwickelt der Modellbildner eine gedankliche Vorstellung des zu untersuchenden Originals. Dabei kann es sich um ein reales technisches Objekt oder ein neues Produkt handeln. Das Ergebnis ist das mentale Modell (Gedankenmodell). Dieses wird durch Informationselemente und -strukturen formalisiert, um es datentechnisch erfassen zu können. Dieses „Informationsmodell“ wird am Rechner implementiert (rechnerinternes Modell, vgl. [PBF+07, DA95]). Eine zentrale Bedeutung kommt dabei dem mentalen Modell zu. Es enthält bereits die notwendigen Abstraktionen und stellt den Ausgangspunkt für eine effiziente Formalisierung dar. Die Formalisierung ist entscheidend

für die erfolgreiche Implementierung des Modells auf einem Rechner. In der Regel werden Modelle in mehreren Iterationsschleifen optimiert. Abhängig von der Modellgenauigkeit können einige Iterationsschleifen notwendig sein. Die Weiterentwicklung von Software, Hardware und Methoden bietet dabei immer mehr Möglichkeiten. So ergeben sich wichtige Rückkopplungen auf den gesamten Modellbildungsprozess, die sogar das Original selbst beeinflussen und verändern können. Dieser Trend wird eindrucksvoll durch die Entwicklungen rund um Cyber-physische Systeme oder Industrie 4.0 bestätigt [VWZ+18].



**Bild 1.3** Entstehung eines rechnerinternen Modells (eigene Abbildung in Anlehnung an [VWZ+18])

### 1.3.3 Anforderungen an den Modellbildner

Der Modellbildner ist die Person, die das Modell erstellt. Sie benötigt also Kenntnisse und Erfahrungen sowohl über die zu untersuchende Fragestellung als auch über die Modellbildung/Simulation oder Versuchs- und Messtechnik. Ihre Arbeitsweise sollte systematisch und methodenunterstützt sein, um die Anforderungsspezifikationen erfolgreich durchzuführen. Gute Modellbildung bedeutet immer: „Das Richtige weglassen.“

Der Modellbildner sollte folgende Basisqualifikationen haben:

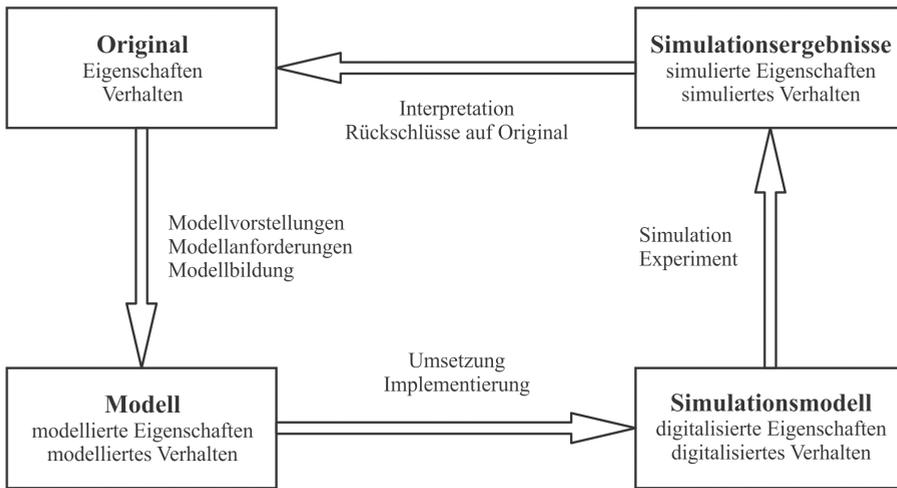
- Tiefgreifende Kenntnisse über das zu untersuchende System. Der Modellbildner muss entscheiden, was vernachlässigt werden kann und daher in den Untersuchungen nicht weiter berücksichtigt wird.
- Weiterführende Kenntnisse und die Beherrschung der vorhandenen Werkzeuge und zur Verfügung stehenden Methoden für die Modellierung und Simulation oder die Versuchs- und Messtechnik.
- Erfahrungen bei der Auswahl geeigneter Modelle unter Berücksichtigung der Kosten, der Zeit und der Aussagefähigkeit der Modellergebnisse.
- Kreativität bei der Erstellung, der Abgrenzung und der Definition des Modells.
- Übung in der Interpretation von Ergebnissen: Die Ergebnisse müssen „richtig“ interpretiert werden. Dabei muss unter anderem zwischen physikalischen Effekten und Artefakten (Messfehlern oder numerischen Effekten) unterschieden werden können.

Die Auswahl der Hilfsmittel zur Modellbildung ist abhängig von der Aufgabenstellung, vom Anwendungsbereich und vom Nutzen/Aufwand-Verhältnis. Es stehen viele rechnergestützte Hilfsmittel zur Verfügung. Die Klassifikation von Simulationen ist abhängig vom verwendeten Modell. Dabei kann es sich um physikalische, numerisch-analytische oder grafische Modelle handeln. Eine scharfe Abgrenzung zwischen den verschiedenen Simulationsarten ist in der Praxis kaum möglich. Je nach Zugänglichkeit der Berechnungsaufgabe kommen verschiedene Methoden zum Einsatz. Verschiedene Methoden ergänzen sich oftmals synergetisch. So können Messungen an realen Objekten zur Identifikation von Modellparametern durchgeführt werden oder numerische Modelle durch bekannte analytische Lösungen überprüft werden. Unter einer Berechnung kann entsprechend dieser Systematik eine Simulation mit analytischen bzw. numerischen Modellen verstanden werden [VWZ+18].

Simulationen werden zur Beantwortung unterschiedlichster Fragestellungen durchgeführt. Die folgende Aufstellung erhebt dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit:

- Es ist kein reales System verfügbar (z. B. in der Entwurfsphase).
- Das Experiment am realen System dauert zu lange.
- Das Experiment am realen System ist zu teuer (z. B. bei einem Crashtest).
- Das Experiment am realen System ist zu gefährlich (z. B. bei Flugzeugen, Kraftwerken).
- Die Zeitkonstanten des realen Systems sind zu groß (z. B. Klimamodelle).
- Die Testszenarien („Lastfälle“) können nicht gesteuert werden.

Bild 1.4 zeigt den Zusammenhang zwischen Simulation und Modellbildung. Neben den entsprechenden Modellen werden Lösungsverfahren und Darstellungsmodelle zur Durchführung einer Simulation benötigt. Die gängigen Simulationssysteme bieten erweiterbare Bibliotheken und Schnittstellen zum Import und Export von Daten. Die Eingabe und Erstellung von Modellen erfolgt grafisch und Funktionen können visualisiert werden.



**Bild 1.4** Simulationskreislauf mit Modellen (eigene Abbildung in Anlehnung an [VWZ+18])

### 1.3.4 Modellvalidierung und Modellverifikation

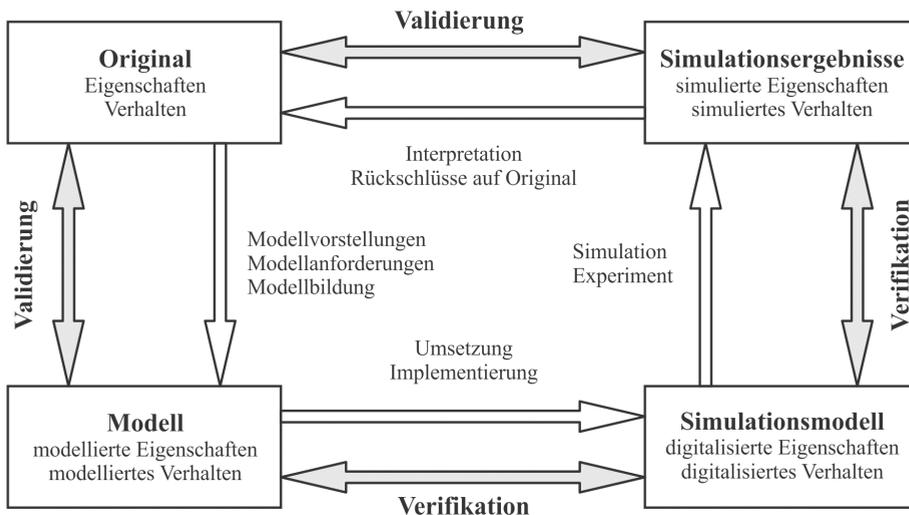
Die Begriffe Verifikation und Validierung können wie folgt beschrieben werden. Sie dürfen nicht verwechselt werden [VDI99, VDI03]. Die Einordnung der Verifikation und Validierung in den Modellierungs- und Simulationsprozess wird in Bild 1.5 gezeigt.

#### Verifikation

Während der Verifikation wird kontrolliert, ob die spezifizierten Anforderungen durch das Modell erfüllt werden. Auch die Implementierung des Modells in die Simulationssoftware wird überprüft. Mithilfe einfacher Berechnungen wird das Modell verifiziert. Als Basis für die Verifikation dienen eigene oder fremde Erfahrungen. Durch Testrechnungen, wie systematische Experimente oder Konsistenzprüfungen, wird geprüft, ob sich das Modell grundsätzlich plausibel verhält. Es wird auf interne Konsistenz geprüft. Fallen hier Ungereimtheiten auf, so muss untersucht werden, ob das Modell fehlerhaft ist oder ob der Fehler in der Erwartungshaltung über das Verhalten des realen Systems begründet liegt. Die Verifikation erfolgt also nur für das Modellverhalten und ist unabhängig von Vergleichen mit dem originalen System. Häufig erfolgt die Verifikation durch Sensitivitätsanalysen. Dabei werden einzelne Randbedingungen, wie aufgebrachte Lasten, geometrische Parameter oder Werkstoffparameter, geändert und das Verhalten des Modells auf Plausibilität geprüft. Wenn geringe Änderungen der beschriebenen Parameter zu unplausiblen Änderungen der Ergebnisse führen, muss das Modell kritisch hinterfragt werden.

## Validierung

Während die Verifikation auf die Güte des Modells bezogen ist, überprüft die Validierung, ob das reale System durch das erstellte Modell zufriedenstellend nachgebildet wird. Auch die Grenzen des Modells, also in welchem Bereich das Modell eine Gültigkeit besitzt, werden bei der Validierung bestimmt. So muss sichergestellt sein, dass das Verhalten des realen Systems im Hinblick auf die Untersuchungsziele genau genug und fehlerfrei durch das Modell abgebildet werden kann. Es wird die Frage beantwortet, ob das Richtige gemacht wurde. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die ersten Simulationsläufe zu richten. Diese dienen der Validierung des Simulationsmodells. Die vollständige Übereinstimmung des Simulationsmodells mit dem abzubildenden realen System ist unmöglich. Das ist aber auch nicht erforderlich. Wie auch die Verifikation kann die Validierung ebenso durch eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt werden. Das Verhalten des Modells wird bei Änderung der Lastfälle oder einzelner Parameter des Modells untersucht. Im Gegensatz zur Verifikation erfolgt bei der Validierung der Vergleich mit dem Verhalten des realen Systems. Neben der Sensitivitätsanalyse werden Plausibilitätsprüfungen durchgeführt. Dabei werden die Wertebereiche von Eingabe- und Ergebnisdaten und die Konsistenz der physikalischen Einheiten im Hinblick auf die zu untersuchenden realen Systeme untersucht. Der Vergleich mit Messungen am realen Objekt oder an einem Prototyp zählt ebenfalls dazu [VWZ+18].



**Bild 1.5** Simulationskreislauf mit Modellen (eigene Abbildung in Anlehnung an [VWZ+18])

## ■ 1.4 Finite-Elemente-Modellierung

Die Methode der finiten Elemente zählt zu den wichtigsten numerischen Rechenverfahren und wird im Ingenieurwesen mit am häufigsten eingesetzt. Erste Verwendungsmöglichkeiten gab es bei physikalisch basierten, mathematischen Modellen im Bereich der Spannungs- und Verformungsprobleme in der Strukturmechanik. Darauf aufbauend wurde die Finite-Elemente-Methode auf das Gebiet der Kontinuumsmechanik erweitert.

Sie ist ein Näherungsverfahren und wird zur Lösung von Problemen des Ingenieurwesens und der Physik verwendet. Zur Näherung werden mathematische Modelle eingesetzt, bei denen feste oder flüssige Körper in Elemente endlicher Größe („finite Elemente“) zerlegt werden. An den Elementgrenzen müssen geeignete Bedingungen für die Übergänge zwischen den einzelnen Elementen definiert werden. Dabei ist es wichtig, dass die Summe aller Elemente in Verbindung mit den Übergangsbedingungen dem Gesamtmodell entspricht. Durch das Zerlegen eines Körpers in finite Elemente ist es möglich, komplexe Geometrien „beliebig genau“ zu approximieren. Das für die Berechnung gewählte Extremalprinzip (z. B. Minimum der potenziellen Energie) gilt dabei sowohl für das globale Modell als auch für die einzelnen finiten Elemente. Zur Lösung des Berechnungsproblems wird zunächst ein adäquates mathematisches Modell ausgewählt. Dieses wird durch algebraische Gleichungen, gewöhnliche oder partielle Differenzialgleichungen oder durch eine Kombination daraus beschrieben. Die Gleichungen können dabei jede Form aufweisen und linear oder nichtlinear sein. Als Problemstellungen kommen sowohl stationäre (zeitlich unveränderliche, insbesondere auch statische) als auch transiente (zeitlich veränderliche, instationäre, dynamische) Vorgänge bzw. Systeme infrage [VWZ+18].

Mit zunehmender Leistungsfähigkeit der Rechnersysteme in den letzten Jahrzehnten ist auch die Nutzung der FEM in vielen verschiedenen Ingenieurdisziplinen angestiegen. Anwendungen sind beispielsweise bei der Festigkeitsrechnung, bei der Dimensionierung von Maschinenelementen oder bei der Berechnung von Magnetfeldern zu finden. Die Simulation mittels FEM stellt dabei ein numerisches Experiment dar und bietet einige Vorteile gegenüber physikalischen Experimenten [VWZ+18]:

- Zeit- und Kostenersparnis (Reduzierung des mit dem Prototypenbau verbundenen Aufwands für Planung, Durchführung und Auswertung von Versuchen)
- Berechnungsnachweise werden immer öfter als Qualitätsnachweise gefordert
- Möglichkeit, kostengünstige und schnelle Variantenstudien und Parametervariationen am rechnerinternen Modell durchzuführen

- Analyse von Bereichen, die für Messungen nur schwer oder gar nicht zugänglich sind (z. B. Motorbrennraum, Hochofen, Dampfturbine, Werkstücke bei Gieß-, Umform- oder spanenden Fertigungsverfahren, Strukturelemente bei Crashuntersuchungen)
- Analyse von Systemen, an denen Versuche nicht möglich, zu gefährlich oder zu teuer sind (z. B. Erdbebenbelastung großer Strukturen)
- Ermittlung und Analyse vollständiger zwei- bzw. dreidimensionaler Verteilungen physikalischer Größen (Spannungen, Verschiebungen, Auflagerreaktionen etc.)

Die FEM-Simulation kann jedoch nicht alle Fragestellungen beantworten, sodass Experimente nach wie vor nötig sind. Berechnungsergebnisse müssen an realen Modellen überprüft werden. Die Berechnungsverfahren unterliegen einer fortlaufenden Verbesserung. Gegenwärtig werden FEM-Systeme überwiegend in den ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen eingesetzt. Dabei werden unterschiedlichste Fragestellungen analysiert und beantwortet [VWZ+18].

FEM-Systeme werden heute in nahezu allen Branchen intensiv eingesetzt, vor allem in der Luft- und Raumfahrt, der Automobilindustrie und dem allgemeinen Maschinenbau (Werkzeugmaschinen-, Stahlbau, Schiffsbau usw.). Außerdem werden FEM-Systeme in der Kunststoff-, der Konsumgüter-, der Elektro- und Elektronikindustrie angewendet.

Trotz der weiten Verbreitung von FEM-Systemen in der praktischen Anwendung ist die korrekte Nutzung dieser Systeme eine qualifizierte Ingenieurarbeit. Sie bedarf üblicherweise eines Spezialisten. Früher wurde deshalb zwischen CAD-Konstrukteuren und FEM-Analitikern unterschieden, wobei beide Tätigkeitsfelder heute zunehmend ineinander übergehen. Trotz aller Vereinfachungen werden die FEM-Probleme nicht automatisch durch Rechner gelöst. Tabelle 1.1 fasst eine Tätigkeitsanalyse zusammen, die zeigt, dass der Rechner nur das zentrale Hilfsmittel ist, ohne dessen Leistungsfähigkeit die Methode generell nicht wirtschaftlich nutzbar wäre.

**Tabelle 1.1** Tätigkeitsanalyse zur Bearbeitung von FEM-Problemen (Quelle: [Kle07])

Anfallende Bearbeitungsschritte	Geschätzter zeitlicher Arbeitsaufwand	Geschätzte Rechenzeit
methodengerechte Aufbereitung des Problems	10 %	
Generierung eines FE-Modells im Pre-Prozessor	50 %	20 %
Rechenlauf		70 %
Ergebnisauswertung im Post-Prozessor und Dokumentation	30 %	10 %
Plausibilitätsprüfung	10 %	

# Index

## Symbole

2,5D-Simulation 60  
3D-CAD-Daten 60  
3D-Fachwerk-Netz 104  
3D-Modell 60  
3D-Vernetzung 234  
3D-Volumenelement-Netz 110

## A

Abkühlen der Kunststoffschmelze  
246  
abstrakte Ebene 4  
Abweichung 17  
Acrylnitril-Butadien-Styrol 227, 244  
Additive 158  
Anguss 36  
Angussbuchse 37  
Angusskanal 38  
Angussposition 33  
Angussstange 37  
Angusssystem 36  
Angussverteiler 38  
Anschnitt 39  
Anspritzpunkt 127, 235  
Aspect Ratio 234  
Aufbereitung  
– Formteildaten 36  
Aufschmelzen 246  
Aufschmelzprozess 139  
Ausblasverfahren 132  
Auskernung 34  
Avrami-Modell 174

## B

Balancierung 186  
Barriereschnecke 139  
Berechnungsart 28  
Berechnungsergebnisse 13  
Berechnungsfehler 127  
Berechnungsumfang 28  
Bindenaht 182  
– Lage 127  
Bindenähte 192  
Blackbox 217f.  
Brenner 121

## C

Carreau-Ansatz 148  
charakteristische Eigenschaften 5  
chemisches Schäumen 135  
Cross-WLF-Gleichung 148

## D

Dehnmessstreifen 219  
Design of Experiments 203  
Diseleffekt 238  
Differenzialgleichung 2f., 19  
Dimensionierung der Kühlung 42  
Drehteller 128  
Dreieckselemente 60  
Druckaufbau 212  
Druckbedarf zum Füllen 121  
Druck, hydraulisch 211  
Druckprofil am Einspritzpunkt 239, 243

Drucksensor 213, 238  
 Druckspitze  
 – am Ende der Füllung 121  
 Druckverlauf am Anschnitt 71, 78, 83,  
 89, 95, 100, 108, 114  
 Druckverteilung 195  
 Durchflussmesser  
 – Magnetisch-induktiv 224  
 – Ultraschall 223  
 Duromere 137, 142  
 Düse 37  
 dynamische Differenzkalometrie 173

## E

Einflussgrößen 204  
 Einspritzdruck  
 – maximaler 126  
 Einspritzgeschwindigkeit 126  
 Einspritzgeschwindigkeiten 120  
 Einspritzprofil 121  
 Einspritzvolumenstrom 235  
 Einspritzzeit 118, 126, 237  
 Elastizitätsmodul 165  
 Elastomere 137, 142  
 Element  
 – Anomalien 17  
 – Entartung 15  
 Elemente 28 f., 32, 45, 57, 61 ff., 74, 76,  
 93, 177, 194  
 Element-Teilungsregel 15  
 Ergebnisinterpretation 180  
 Ergebnisqualität 17  
 Ergebnisse  
 – der einzelnen Simulationen 117  
 Erhaltung der Energie 51  
 Erhaltungsgleichungen  
 – vereinfachte 55  
 Erreichen des Siegelpunktes 87, 92, 98,  
 103  
 Erstarrte Bereiche zum Ende der Füllung  
 72, 79, 86, 92, 97, 103, 109, 115  
 Erstarrte Bereiche zum Umschalt­punkt  
 72, 80

## F

Fasern 166  
 faseroptische Sensoren 220  
 Faserorientierung 199  
 Fehlerbehebung 2  
 Fehlererkennung 2  
 FEM 12  
 – Fehlerquellen 14  
 Feststoffbett 139  
 Feststoffförderung 140  
 Filtermodell 175  
 Fließfrontgeschwindigkeit 121, 187  
 Fließfronttemperatur 69, 76, 85, 90, 96,  
 101, 105, 112, 192, 240  
 Fließverhalten duroplastischer  
 Formmassen 138  
 Flügelrad­sensor 225  
 flüssige Seele 194  
 Free Edges 234  
 freie Formgebung 33  
 Füllbild 68, 75, 82, 88, 93, 99, 105, 111,  
 181  
 Füll­druck 187  
 Füll­druck am Ende der Füllung 70, 77,  
 83, 89, 94, 100, 107, 114  
 Füll­druck am Umschalt­punkt 70, 77, 82,  
 88, 94, 99, 107, 113  
 Füllsimulation  
 – Ablauf 26  
 Füllstudie 182  
 Füllung  
 – balanciert 38, 185  
 – unbalanciert 40, 185

## G

Gasblasen 136  
 Gasdruck 136  
 Gasinnendruck-Verfahren 132  
 Gestaltungsregeln 30  
 Gewinde 35  
 Glasübergang 155  
 Gültigkeitsbereich 6

**H**

Halpin und Tsai 169  
Haltezeit 118  
Hautkomponente 131  
Heißkanal 37, 39, 118  
Herstellung eines Spielzeugaffen 130  
Hinterschneidungen 32  
Hinterschnitt 37  
Hoffmann-Lauritzen-Modell 174  
Hydraulikdruck 243  
hydraulische Reaktionszeit 239, 243

**I**

Idealisierung 18  
Impulsleichung 50  
indirekte Druckmessung 220  
Infrarotspektroskopie 174

**K**

kalter Pfropfen 246  
Kaltkanal 37  
Kaskadensteuerung 127  
Kernkomponente 131  
Kernresonanzspektroskopie 174  
Knoten 15, 28, 40, 57, 59, 61, 66, 127, 177, 200  
Kompaktspritzgießen 118, 235  
Konizitäten 32  
Kontinuitätsgleichung 49  
Konvergenzverhalten 15  
Kosten in der Produktentwicklung 23  
Kosten von Änderungsschleifen 26  
Kraftgrößen-Methode 3  
Kristallisation 172  
Kristallisationsgrad 172  
Kristallisationsvorgang 156  
Kühlbohrung 234  
Kühlelemente 43  
Kühlkanäle 41, 126  
Kühlkern 44  
Kühlkreisläufe  
– separate 44

Kühlmedientemperatur 241  
Kühlsystem 41  
– maximalen Temperaturdifferenz 45  
– Reynoldszahl 45  
Kühlung 201  
Kühlungen  
– konturnahe 45  
Kühlzeit 118, 228, 235  
– Abschätzung 124  
Kunststoffgerechte Auslegung 29  
Kunststoff-Metall-Verbund 34  
Kurzfasern 169

**L**

Langfasern 169  
Löcher 34  
Lösungs-verfahren 14, 26  
Luftabschluss 182, 186

**M**

Masseanhäufungen 30  
Massetdruck 211  
Materialauswahl 28  
Materialdaten 142  
Materialdatenbank 28, 142, 150, 176, 206  
Maximaler Druck 232  
Mechanische Kennwerte 165  
Mehrkomponentenspritzgießen 128  
Methode der finiten Elemente 12  
mikromechanische Ansätze 169  
Mittelflächenmodell 60  
Modell 4  
Modellbildner 8  
Modellbildung 4, 17  
– Experimentelle Verfahren 6  
– Hybride Verfahren 7  
– Rechnerische Verfahren 6  
Molekülorientierungen 145  
MuCell-Verfahren 135

**N**

Nachdruck 214  
 Nachdruckhöhe 122, 236  
 Nachdruckphase 122  
 Nachdruckprofil 123  
 Nachdruckstufe 122  
 Nachdruckzeit 236  
 Näherungsverfahren 12  
 Nakamura-Modell 174  
 Navier-Stokes-Gleichungen 47, 58  
 Netzaufbau 15  
 Netzfeinheit 17, 117  
 Netzqualität 64, 117  
 – Autodesk Moldflow Insight 81  
 – CADMOULD 104  
 – Moldex3D 68  
 Netztypen 60  
 Non-Manifold Edges 234

**O**

Oberflächenmodell 60  
 Oberflächennetz 234  
 ohmscher Widerstand 218  
 Optimum  
 – zum Erreichen der Zielgrößen 205  
 Orientierungen 145  
 Orientierung von Fasern 167

**P**

Partnerregel der Knotenpunkte 15  
 physikalisches Schäumen 135  
 piezoelektrischen Sensoren 219, 221, 225  
 Piezoresistiver Drucksensor 219, 221  
 Plastifizierdüse 118  
 Plastifizierschnecke 139  
 Plastifizierte Bereiche  
 – zum Ende der Füllung 73, 79  
 – zum Umschaltpunkt 73, 80  
 Plastifizierung 118  
 Polyamid 66 227, 245  
 Polycarbonat 227, 245

Polynomgrad 18  
 Polypropylen 227, 243  
 Post-Processing 14, 27  
 Potenzansatz 147  
 Prägespalt 133  
 Pre-Processing 14, 26  
 Produktentwicklungsprozess 22  
 Prozessparameter 178  
 p-v-T-Diagramm 151

**Q**

Qualität der Ergebnisse 67  
 Qualität der Spritzgießsimulation 176  
 Querkontraktionszahl 165

**R**

Rabinowitsch-Weißenberg-Korrektur 57  
 Radian 31  
 Randbedingungen 17  
 Randschicht 145  
 Realitätsebene 4  
 rechnerinternes Modell 8  
 Rippen 31  
 Röntgenbeugung 173

**S**

Sandwichspritzgießen 131  
 Schalentheorie 61  
 Schergeschwindigkeit 53  
 Scherrate 56  
 Scherrate im Anschnitt 74, 81, 86, 91, 97, 102, 109, 116  
 Scherung 197  
 Schichtströmung 48, 56  
 Schieber 128  
 Schmelzedekompression 235  
 Schmelzeförderung 141  
 Schmelzen 156  
 Schmelzepolster 119  
 Schneckenkanal 140  
 Schneckenposition 235, 241

Schneckenorraum 119, 215 f., 219, 221,  
229, 237, 241, 246  
Schubmodul 165  
Schubmodul-Temperatur-Schaubild 143  
Schwindung 119, 198  
Sensitivität 205  
Siegelpunkt 119, 126  
Siegelzeit 122  
Simulationskreislauf mit Modellen 10  
Simulationsmodell 233  
Spannungskomponenten an einem  
Fluidteilchen 49  
spezifische Wärmekapazität 52, 157, 159  
Spritzgießmaschine 217, 234  
Spritzgießzyklus 118 f.  
Spritzprägen 133  
Standarddreizonenschnecke 139  
statistische Versuchsplanung 203  
Steuergrößen 204  
Störgrößen 204  
Strömungsgeschwindigkeit 64  
Strömungsprofil  
– strukturviskoses 64  
Strömungstechnik 47  
Strukturviskoses Verhalten 146  
Systemdenken 4

## T

Taguchi 205  
Tait-Modell 152  
Tandon und Weng 169  
Temperatur  
– an der Kavität 202  
– des Kühlmittels 203  
Temperaturleitfähigkeit 126  
Temperatursensor 127, 229  
Temperaturverteilung  
– im Formteil 193  
Temperiergerät 41  
Tetraeder 235  
Tetraederelemente 62  
Thermoelement 221  
Thermoplaste 142  
Thermoplast-Schaumspritzgießen 135

## U

Übergangstemperatur 152  
Überpacken 236  
Umschalten 121  
Umschaltpunkt 120, 126, 214, 217, 229,  
236, 238  
Umspritzen 128  
Ursachenforschung bei Problemen 23

## V

Validierung 11  
Variantenanalyse 203  
Variantenanalyse Werkzeugkonstruktion  
25  
Verarbeitung der duroplastischen  
Schmelze 138  
Verbrennungsschlieren 121  
Verfahrensablauf beim Reaktiv-  
spritzgießen 138  
Verifikation 10  
Vernetzer  
– Autodesk Moldflow Insight 66, 81  
– BLM 65, 75  
– CADMOULD 66, 104, 110  
– eDesign 65, 68  
Vernetzung 67  
Vernetzungsreaktion 137  
Verschiebungsgrößen-Methode 3  
Verstärkungsstoffe 167  
Versuchsplan 207  
Versuchspläne 205  
Versuchsplan nach Taguchi 205  
Verteilersystem 127  
Verzug 199  
Viskosität 53, 145  
Vogeltemperatur 150  
volumetrische Füllung 213

## W

Wanddicke 30  
Wandhaftung 55  
Wärmeausdehnungskoeffizient 163

Wärmeleitfähigkeit 161  
Wärmeleitung 53  
Werkstoffauswahl 175  
Werkstoffdatenbank 235  
Werkstoffkennwerte 177  
Werkzeuginnendruck 214 f.  
Werkzeuginnendruckkurve 124  
Werkzeugkern 46  
Werkzeugwandtemperatur 125 f.

Werkzeugwerkstoff 46, 234  
Widerstandsthermometer 221

## Z

Zeitpunkte für Füllsimulationen 22  
Zielgrößen 204, 207  
Zykluszeit 228, 230 f.