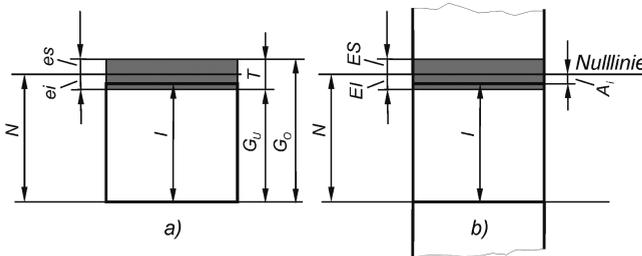


# 1 Konstruktionstechnik

## Maße, Abmaße und Toleranzen



**Bild 1.1**  
Maße und Abmaße  
a) an einer Welle,  
b) an einer Bohrung

Oberes Abmaß  $ES$  (bzw.  $es$ ) =  $G_o - N$

Unteres Abmaß  $EI$  (bzw.  $ei$ ) =  $G_u - N$

Istmaß  $A_i = I - N$

Maßtoleranz  $T = G_o - G_u$  oder  $T = ES - EI$  (bzw.  $es - ei$ )

$N$  Nennmaß,  $I$  Istmaß,  $G_o$  Höchstmaß,  $G_u$  Mindestmaß

Allgemeintoleranzen nach DIN ISO 2768-1 (siehe Tabelle 1.7)

## ISO-Toleranzsystem

Für die Grundtoleranzgrade IT 5 bis IT 18 und Nennmaße bis 500 mm:

$$\text{Toleranzfaktor } i = 0,45\sqrt[3]{D} + 0,001D \text{ in } \mu\text{m} \quad (1.1)$$

Für Nennmaße über 500 mm bis 3150 mm:

$$\text{Toleranzfaktor } I = 0,004D + 2,1 \text{ in } \mu\text{m} \quad (1.2)$$

$D = \sqrt{D_1 \cdot D_2}$  geometrisches Mittel aus den Zahlenwerten der Grenzwerte  $D_1$  und  $D_2$  des Nennmaßbereichs.

Eine ISO-Grundtoleranz  $T$  ist ein Vielfaches des Toleranzfaktors  $i$  bzw.  $I$  (siehe Tabelle 1.2). Die errechneten Werte sind nach vorgegebenen Regeln zu runden, und zwar die nach Formel 1.1 bis 100  $\mu\text{m}$  auf 1  $\mu\text{m}$ , bis 200  $\mu\text{m}$  auf 5  $\mu\text{m}$  und bis 500  $\mu\text{m}$  auf 10  $\mu\text{m}$  genau. Verbindliche Werte der Grundtoleranzen bis 3150 mm sind in DIN EN ISO 286-1 angegeben (Auszug siehe Tabelle 1.2). Für Nennmaße über 3150 mm gilt weiterhin DIN 7172.

## Passungen

Spielpassung:

$$\text{Höchstspiel } S_g = ES - ei = G_{oB} - G_{uW} \quad (1.3)$$

$$\text{Mindestspiel } S_k = EI - es = G_{uB} - G_{oW} \quad (1.4)$$

Übermaßpassung:

$$\text{Höchstübermaß } U_g = es - EI = G_{oW} - G_{oB} \quad (1.5)$$

$$\text{Mindestübermaß } U_k = ei - ES = G_{uW} - G_{oB} \quad (1.6)$$

Übergangspassung:

Höchstspiel  $S_g$  nach Formel 1.3 und Höchstübermaß  $U_g$  nach Formel 1.5

$ES, EI, es, ei$  oberes und unteres Abmaß der Bohrung bzw. der Welle,  
 $G_{oB}, G_{uB}, G_{oW}, G_{uW}$  Höchstmaß und Mindestmaß der Bohrung bzw. der Welle.

Toleranz der Passung:

$$\text{Passtoleranz } T_p = S_g - S_k \quad \text{bei Spielpassung} \quad (1.7)$$

$$T_p = S_g + U_g \quad \text{bei Übergangspassung} \quad (1.8)$$

$$T_p = U_g - U_k \quad \text{bei Übermaßpassung} \quad (1.9)$$

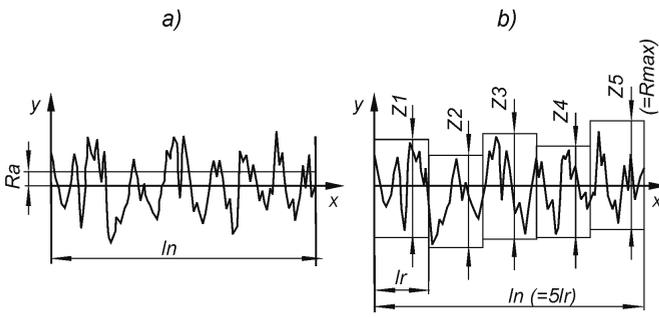
$$T_p = T_B + T_W \quad \text{allgemein} \quad (1.10)$$

Zur Auswahl von Passungen siehe Tabelle 1.9.

## Rauheit der Oberflächen

Rauheitsmessgrößen:

- **Arithmetischer Mittenrauwert  $R_a$**  (kurz Mittenrauwert) = arithmetisches Mittel der absoluten Beträge der Profilabweichungen  $y$  von der Mittellinie innerhalb der Gesamtmessstrecke  $l_n$  (Bild 1.2a).
- **Gemittelte Rautiefe  $R_z$**  =  $(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5)/5$  als arithmetisches Mittel aus den Einzelrautiefen  $Z_i$  fünf aneinander grenzender Einzelmessstrecken  $l_e$  (Bild 1.2b).
- **Maximale Rautiefe  $R_{max}$**  = größte der auf der Gesamtmessstrecke  $l_n$  vorkommenden Einzelrautiefen  $Z_i$ , z. B.  $R_{max} = Z_5$  in Bild 1.2b.



**Bild 1.2**  
 Rauheitskenngrößen  
 a) arithmetischer Mittelrauwert  $R_a$ , b) Einzelrautiefen als Grundlage für die Bestimmung der gemittelten Rautiefe  $R_z$  und von  $R_{max}$

Näherungsweise gilt  $R_a \approx 0,1 R_z$  und  $R_z \approx R_{max}$ .

## 3 Festigkeitsberechnungen

### Kräfte

$$\text{Allg. Kraft} \quad F = m \cdot a \quad (3.1)$$

$F$  in N Kraft,  
 $m$  in kg Masse,  
 $a$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  Beschleunigung.

Mehrere Einzelkräfte können im Spezialfall unter Anwendung des Satzes des Pythagoras zu einer Resultierenden zusammengefasst werden:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 \rightarrow F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (3.2)$$

$F$  in N Kraft.

### Momente

$$\text{Allg. Moment} \quad M = F \cdot l \quad (3.3)$$

$M$  in Nm Moment,  
 $F$  in N Kraft,  
 $l$  in m Hebelarm.

In der Statik können damit sechs Gleichgewichtsbedingungen für den Raum aufgestellt werden.

$$\sum F_X = 0 \quad \sum F_Y = 0 \quad \sum F_Z = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum M_X = 0 \quad \sum M_Y = 0 \quad \sum M_Z = 0 \quad (3.5)$$

$F_x$  in N Kraft in x-Richtung,  
 $F_y$  in N Kraft in y-Richtung,  
 $F_z$  in N Kraft in z-Richtung,  
 $M_x$  in Nm Moment um x-Achse,  
 $M_y$  in Nm Moment um y-Achse,  
 $M_z$  in Nm Moment um z-Achse.

## Allgemeine Festigkeitsberechnung

Die Spannung  $\sigma$  ist ein Maß für die Beanspruchung:

$$\text{Spannung} \quad \sigma = \frac{F}{A} \quad (3.6)$$

$\sigma$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $F$  in N Kraft,  
 $A$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte Querschnittslänge.

Die Verformung (z. B. Verlängerung eines Stabes infolge einer Zugkraft) bezogen auf den Ausgangszustand (Ausgangslänge des Stabes) liefert ein dimensionsloses Maß für die auftretende Verformung, die sogenannte Dehnung  $\varepsilon$ :

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad (3.7)$$

$\varepsilon$	Dehnung,
$\Delta l$ in m	Verlängerung/Verkürzung,
$l_0$ in m	Ausgangslänge,
$l_1$ in m	Länge im belasteten Zustand.

Der Zusammenhang zwischen der Beanspruchung, also der inneren Spannung  $\sigma$ , und der Dehnung  $\varepsilon$  wird durch ein Stoffgesetz beschrieben. Im Falle eines isotropen, linear-elastischen Materials gilt beispielsweise:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.8)$$

$\sigma$ in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Spannung,
$E$ in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	E-Modul,
$\varepsilon$	Dehnung.

## Beanspruchungen

### Grundbeanspruchungsarten

Zugbeanspruchung:  $\sigma_z = \frac{F_z}{A}$

Druckbeanspruchung:  $\sigma_D = \frac{F_D}{A}$

$$\text{Flächenpressung } p = \frac{F}{A} \text{ bzw.} \quad (3.9)$$

$$p = \frac{F}{A_{\text{proj}}} \text{ (beispielsweise Zapfen in einer Lagerschale)} \quad (3.10)$$

$$\text{Biegebeanspruchung } \sigma_b(z) = \frac{M_b}{I_y} \cdot z \quad (3.11)$$

$$\text{Maximale Biegespannung } \sigma_{b,\max} = \frac{M_b}{W_{b,y}} \quad (3.12)$$

$$\text{Schubbeanspruchung } \tau_m = \frac{Q}{A} \quad (3.13)$$

$$\text{Torsionsbeanspruchung } \tau_t(z) = \frac{M_t}{I_t} \cdot z \quad (3.14)$$

$$\text{Maximale Torsionsspannung } \tau_{t,\max} \left( z = \frac{D}{2} \right) = \frac{M_t}{I_t} \cdot \frac{D}{2} = \frac{M_t}{W_t} \quad (3.15)$$

- $F$  in N Kraft,  
 $A$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte Querschnittsfläche,  
 $A_{\text{proj}}$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte projizierte Querschnittsfläche (siehe Bild 3.23 in ME),  
 $\sigma$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $\tau$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $M_b$  in Nmm Biegemoment,  
 $I$  in  $\text{mm}^4$  Flächenträgheitsmoment,  
 $z$  in mm Randfaserabstand,  
 $W_b$  in  $\text{mm}^3$  Biege widerstandsmoment,  
 $Q$  in N Querkraft,  
 $M_t$  in Nmm Torsionsmoment,  
 $I_t$  in  $\text{mm}^4$  Torsionsflächenträgheitsmoment,  
 $W_t$  in  $\text{mm}^3$  Torsionswiderstandsmoment.

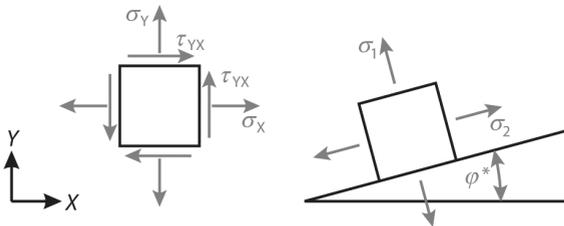
### Zusammengesetzte Beanspruchungen

Die Hauptspannungen im ebenen Spannungszustand berechnen sich wie folgt:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.16)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.17)$$

Bild 3.1 erläutert die Spannungskomponenten.



**Bild 3.1**

Ebener Spannungszustand (links) und Hauptnormalspannungen mit Hauptachsensystem (rechts)

Die Art und Weise der Überführung des mehrachsigen Spannungszustands in den einachsigen ist abhängig von der Richtung der Spannungskomponenten. Sind die Komponenten gleich gerichtet, wie es bei auftretender Zug-/Druckbeanspruchung zusammen mit Biegebeanspruchung der Fall ist, können die Spannungskomponenten mit dem aus der Mechanik bekannten Superpositionsprinzip zusammengefasst werden.

$$\sigma_{\max} = \sigma_z + \sigma_{b,\max}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_z - \sigma_{b,\max}$$

Zur Überführung in den einachsigen Spannungszustand gibt es grundsätzlich eine Reihe von Festigkeitshypothesen, in der Praxis haben sich jedoch die im Folgenden genannten Hypothesen bewährt.

### Normalspannungshypothese

Die Hauptspannungen werden nachfolgend mit  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  bezeichnet und sind absteigend sortiert, sodass  $\sigma_1$  die größte Hauptspannung darstellt.

$$\text{Vergleichsspannung } \sigma_V = |\sigma_1| < K \quad (3.18)$$

$$\text{Vergleichsspannung im mehrachsigen Spannungszustand } \sigma_V = \sigma_{\max} = 2 \cdot \tau_{\max} \quad (3.19)$$

$\sigma_V$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\sigma_1$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\sigma_{\max}$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\tau_{\max}$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Schubspannung,

$K$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Werkstoffkennwert.

### Gestaltänderungsenergiehypothese

Für den räumlichen Spannungszustand ergibt sich die Vergleichsspannung wie folgt:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z) + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.20)$$

Die Vergleichsspannung für den zwei- und einachsigen Spannungszustand vereinfacht sich zu folgenden Gleichungen:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.21)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.22)$$

### Knickung

Knickung kann bei schlanken (wesentlich kleinere Querschnittsfläche im Vergleich zur Stablänge) druck- und/oder torsionsbelasteten Stäben auftreten. Maßgeblich beeinflusst wird die Knickung von der Querschnittsfläche und vom Flächenträgheitsmoment  $I$ , woraus sich der Trägheitsradius  $i$  ergibt:

$$\text{Knickung } i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.23)$$

$i$  in mm Trägheitsradius,

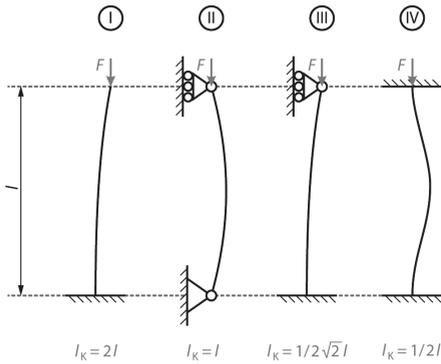
$I$  in  $\text{mm}^4$  Flächenträgheitsmoment,

$A$  in  $\text{mm}^2$  Querschnittsfläche.

$$\text{Schlankheitsgrad } \lambda = \frac{l_K}{i} \quad (3.24)$$

$l_K$  in mm freie Knicklänge nach Bild 3.2,

$\lambda$  Schlankheitsgrad.



**Bild 3.2**  
Die vier Knickfälle nach Euler

Im Anschluss an die Berechnung des Schlankheitsgrads ist zum Vergleich der Grenzschlankheitsgrad  $\lambda_{\text{Grenz}}$  zu ermitteln:

$$\text{Grenzschlankheitsgrad } \lambda_{\text{Grenz}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (3.25)$$

$E$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  E-Modul,

$\sigma_p$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Proportionalitätsgrenze.

Unter Verwendung des Schlankheitsgrads  $\lambda$  und des Grenzschlankheitsgrads  $\lambda_{\text{Grenz}}$  erfolgt die Differenzierung zwischen der elastischen Knickung nach Euler und der unelastischen Knickung nach Tetmajer:

$$\lambda < \lambda_{\text{Grenz}}: \text{Knickung nach Tetmajer} \quad (3.26)$$

$$\lambda \geq \lambda_{\text{Grenz}}: \text{Knickung nach Euler} \quad (3.27)$$

Kann für den vorliegenden Knickfall eine elastische Knickung nach Euler angenommen werden, ermittelt sich die Knickspannung ( $\sigma_K$ ) wie folgt:

$$\text{Knickspannung } \sigma_K = \sigma_{K,\text{Euler}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (3.28)$$

Im Falle unelastischer Knickung nach Tetmajer ergeben sich folgende materialabhängige Zusammenhänge:

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 310 - 1,14 \cdot \lambda \quad \text{für Stähle S235J, E335} \quad (3.29)$$

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 335 - 0,62 \cdot \lambda \quad \text{für Federstahl} \quad (3.30)$$

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2 \quad \text{für Grauguss} \quad (3.31)$$

Die nach einer der vorangegangenen Gleichungen ermittelte Knickspannung  $\sigma_K$  dient abschließend dem Knicknachweis:

$$S = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\text{vorh}}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_d} > \begin{array}{l} 5 \dots 10 \text{ Knickfall nach Euler} \\ 3 \dots 8 \text{ Knickfall nach Tetmajer} \end{array} \quad (3.32)$$

## Hertz'sche Pressung

### 3

#### Kugel gegen Kugel

Die Abplattung im Kugel-Kugel-Kontakt beschreibt einen Kreis mit dem Radius  $a$  als Berührfläche:

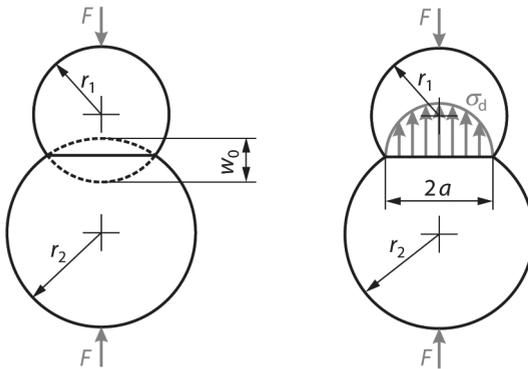
$$a = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot F \cdot (1 - \nu^2)}{E \cdot \varrho}} \quad (3.33)$$

Das Maximum  $\sigma_{d,\max}$  ist mittig in der Berührfläche und wird als  $p_0$  bezeichnet:

$$\sigma_{d,\max} = -\varrho_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot F \cdot E^2 \cdot \varrho^2}{(1 - \nu^2)^2}} \quad (3.34)$$

$$\text{Maximum der Abplattung } w_0 = \sqrt[3]{\frac{2,25 \cdot F^2 \cdot (1 - \nu^2)^2 \cdot \varrho}{E^2}} \quad (3.35)$$

- $a$  in mm Radius,  
 $F$  in N Kraft,  
 $\nu$  Querkontraktion,  
 $E$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  E-Modul,  
 $\varrho$  in  $\text{mm}^{-1}$  Summe der reziproken Radien,  
 $w_0$  in mm Abplattung.



**Bild 3.3**

Resultierende Spannungsverhältnisse (rechts) infolge Hertz'scher Pressung zwischen zwei Kugeln (links)

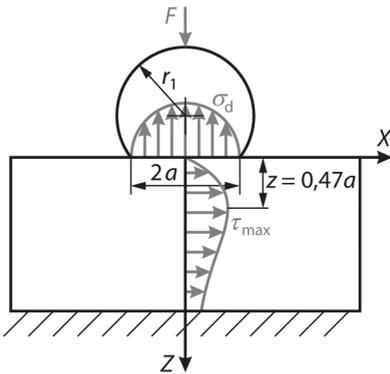
#### Kugel gegen Ebene

Im Falle eines Kugel-Ebene-Kontakts ist lediglich die Krümmung  $p_2$  der Ebenen null zu setzen (eine Ebene besitzt einen unendlich großen Radius).

$$\tau_{\max} = 0,31 \cdot \sigma_{d,\max} \quad (3.36)$$

$$z = 0,47 \cdot a \quad (3.37)$$

- $z$  in mm Tiefenort des Maximums.



**Bild 3.4**  
Resultierende Spannungsverhältnisse infolge Hertz'scher Pressung zwischen einer Kugel und einer Ebene nach [3.12]

### Zylinder gegen Zylinder

Die Breite  $2a$  der resultierenden rechteckförmigen Berührfläche lautet formelmäßig:

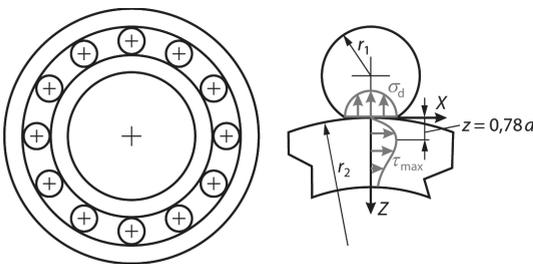
$$a = \sqrt{\frac{8 \cdot F \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot l \cdot \varrho}} \quad (3.38)$$

Der Druckspannungsverlauf ist auch beim Zylinder-Zylinder-Kontakt halbkreisförmig. Die maximale Druckspannung  $\sigma_{d,\max}$  bzw.  $p_0$  bildet sich in der Mitte der Berührfläche aus:

$$\sigma_{d,\max} = -p_0 = -\sqrt{\frac{F \cdot E \cdot \varrho}{2 \cdot \pi \cdot l \cdot (1 - \nu^2)}} \quad (3.39)$$

$$z = 0,78 \cdot a \quad (3.40)$$

$$\tau_{\max} = 0,30 \cdot \sigma_{d,\max} \quad (3.41)$$



**Bild 3.5**  
Resultierende Spannungsverhältnisse infolge Hertz'scher Pressung zwischen zwei Zylindern am Beispiel eines Wälzlagers

## Beanspruchbarkeit

### Dynamische Beanspruchung

Die Mittelspannung  $\sigma_m$  sowie die Ausschlagspannung  $\sigma_a$  ist aus der *Oberspannung*  $\sigma_o$  und der *Unterspannung*  $\sigma_u$  berechenbar:

$$\text{Mittelspannung } \sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \quad (3.42)$$

$$\text{Ausschlagspannung } \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad (3.43)$$

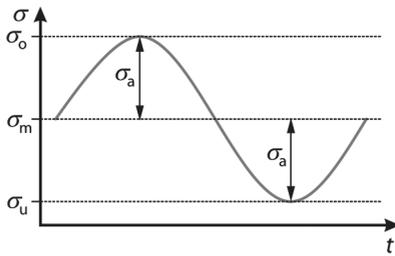
Sind hingegen die Mittelspannung und die Ausschlagspannung bekannt, ist über folgende Beziehungen die Oberspannung  $\sigma_o$  und die Unterspannung  $\sigma_u$  feststellbar:

$$\text{Oberspannung } \sigma_o = \sigma_m + \sigma_a \quad (3.44)$$

$$\text{Unterspannung } \sigma_u = \sigma_m - \sigma_a \quad (3.45)$$

Eine weitere Kenngröße zur Charakterisierung dynamischer Beanspruchungen stellt das Spannungsverhältnis  $R$  dar:

$$\text{Spannungsverhältnis } R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad (3.46)$$



**Bild 3.6**  
Schwingspiel bzw. Lastwechsel

$$\text{Dauerschwingfestigkeit bzw. Dauerfestigkeit } \sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_a \quad (3.47)$$

### Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh

Das nach B. P. Haigh benannte Dauerfestigkeitsschaubild stellt eine alternative Darstellungsweise zum Smith-Diagramm dar. Es bietet die Möglichkeit, die Ausschlagspannungen  $\sigma_a$  zum einen für den Dauerfestigkeitsbereich, aber zum anderen auch für den Zeitfestigkeitsbereich in Abhängigkeit von der Mittelspannung  $\sigma_m$  und dem Spannungsverhältnis  $R$  zu ermitteln. Analog zum Smith-Diagramm liegt beim Haigh-Diagramm die Mittelspannung  $\sigma_m$  auf der Abszisse. Auf der Ordinate ist die Ausschlagspannung  $\sigma_a$  aufgetragen.

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R} \quad (3.48)$$

$$\sigma_a = \sigma_w \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)} \quad (3.49)$$

$$\sigma_a = \sigma_w \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) \quad (3.50)$$