Aufgabe 1

1. Hauptsatz für geschlossenes System, Temperatur eines Härtebades

Vorstellung:

In einem Härtebad, das adiabat zu betrachten ist, werden 200 kg Stahl mit einer Temperatur von 1173 K in 1000 kg Wasser mit einer Temperatur von 288 K abgeschreckt (Bild 1.1).

Gesucht:

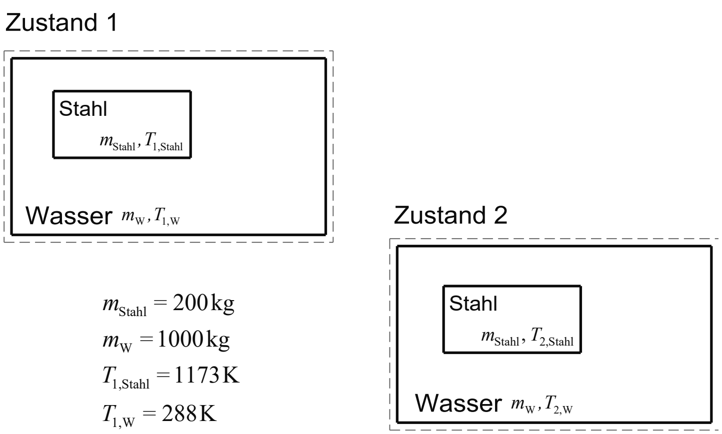
Temperatur T_m des Härtebades, wenn dieses das thermische Gleichgewicht (Zustand 2) erreicht hat.

Lösung:

1. Hauptsatz für geschlossenes System (Bild 1.1):

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1 \qquad Q_{12} = 0 \qquad W_{12} = 0$$

$$U_2 = U_1$$



$$m_{Stahl} = 200\,kg$$
$$m_W = 1000\,kg$$
$$T_{1,Stahl} = 1173\,K$$
$$T_{1,W} = 288\,K$$

Bild 1.1 System mit Bilanzhülle – Zustände 1 und 2

Die innere Energie des gesamten Systems im Zustand 1 ergibt sich additiv aus der inneren Energie der Stahls und der des Wassers bei den Temperaturen $T_{1,\text{Stahl}}$ und $T_{1,\text{W}}$:

$$U_1 = U_{1,\text{Stahl}} + U_{1,\text{W}} = m_{1,\text{Stahl}} \cdot u_{1,\text{Stahl}} + m_{1,\text{W}} \cdot u_{1,\text{W}}$$

$$U_1 = m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{1,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{1,\text{W}}$$

Die innere Energie des gesamten Systems im Zustand 2 ergibt sich additiv aus der inneren Energie der Stahls und der des Wassers bei der Temperatur $T_{\text{m}} = T_{2,\text{Stahl}} = T_{2,\text{W}}$:

$$U_2 = U_{2,\text{Stahl}} + U_{2,\text{W}} = m_{\text{Stahl}} \cdot u_{2,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot u_{2,\text{W}}$$

$$U_2 = m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{2,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{2,\text{W}}$$

$$U_2 = U_1 \qquad T_{\text{m}} = T_{2,\text{Stahl}} = T_{2,\text{W}}$$

$$m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{\text{m}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{\text{m}} = m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{1,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{1,\text{W}}$$

$$T_{\text{m}} \left(m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \right) = m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{1,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{1,\text{W}}$$

$$T_{\text{m}} = \frac{m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} \cdot T_{1,\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}} \cdot T_{1,\text{W}}}{m_{\text{Stahl}} \cdot c_{\text{Stahl}} + m_{\text{W}} \cdot c_{\text{W}}}$$

$$\boldsymbol{c_{\text{W}} = 4{,}18\ \text{kJ} / \left(\text{kg} \cdot \text{K}\right)}$$

$$\boldsymbol{c_{\text{Stahl}} = 0{,}46\ \text{kJ} / \left(\text{kg} \cdot \text{K}\right)}$$

$$T_{\text{m}} = \frac{200\,\text{kg} \cdot 0{,}46 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} 1173\,\text{K} + 1000\,\text{kg} \cdot 4{,}18 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} 288\,\text{K}}{200\,\text{kg} \cdot 0{,}46 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + 1000\,\text{kg} \cdot 4{,}18 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = \frac{1311756}{4{,}272}\text{K}$$

$$T_{\text{m}} = 307\,\text{K}$$

Aufgabe 2

1. Hauptsatz für offenes System, Massenstrom einer Wasserbremse

Vorstellung:

Ein Verbrennungsmotor wird mit einer Wasserbremse (adiabat) in einem stationären Betriebszustand gehalten, bei dem er eine Leistung von $3500 \cdot 10^3\,\text{kJ/h}$ hat. Die vom Motor abgegebene Leistung erhöht in der Bremse durch Reibleistung die innere Energie des Wassers (Bild 2.1).

Die äußeren Energien sind zu vernachlässigen.

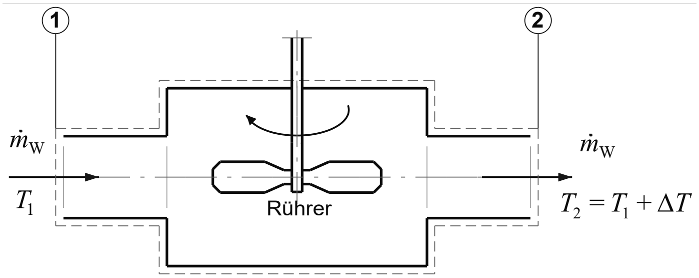


Bild 2.1 Wasserbremse mit Bilanzhülle

Gesucht:

Wassermassenstrom $\dot{m}_W$, wenn am Austritt aus der Bremse die Temperaturänderung $\Delta T = 35\,\text{K}$ beträgt.

Lösung:

1. Hauptsatz für offenes System:

$$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m}_W \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) \right] \qquad \dot{Q}_{12} = 0$$

$$P_{12} = \dot{m}_W \left(h_2 - h_1\right) \qquad c_1 = c_2 \qquad z_1 = z_2$$

$$P_{12} = \dot{m}_W \left(u_2 + p_2 \cdot v_2 - u_1 - p_1 \cdot v_1\right) \qquad p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 \qquad \rho_W = \text{konst.}$$

$$P_{12} = \dot{m}_W \left(u_2 - u_1\right) = \dot{m}_W \int_1^2 c_W\left(T\right) \mathrm{d}T$$

$$\int_1^2 c_W\left(T\right) \mathrm{d}T = c_{W,m}\left(T_2 - T_1\right)$$

Da die spezifische Wärme von Wasser nur geringfügig von der Temperatur abhängt, kann mit dem Mittelwert $c_{W,m}$ gerechnet werden.

$$P_{12} = \dot{m}_W \cdot c_{W,m}\left(T_2 - T_1\right) = \dot{m}_W \cdot c_{W,m} \cdot \Delta T$$

$$\boldsymbol{c_{W,m} = 4{,}18\ \frac{kJ}{kg \cdot K}}$$

$$\dot{m}_W = \frac{P_{12}}{c_{W,m} \cdot \Delta T} = \frac{3500 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{h}}}{4{,}18\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\ 35\,\mathrm{K}} = \frac{3500 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kJ}}{3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s}}}{4{,}18\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\ 35\,\mathrm{K}}$$

$$\dot{m}_W = 6{,}645\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Aufgabe 3

1. Hauptsatz für offenes System, Kondensator eines Kraftwerks, Wasser-Massenstrom

Vorstellung:

Im Kondensator eines Kraftwerkes muss dem zu kondensierenden Dampf ein Wärmestrom von $273 \cdot 10^6\,\mathrm{kJ/h}$ entzogen werden. Als Kühlstrom steht das Wasser eines Flusses zur Verfügung (Bild 3.1).

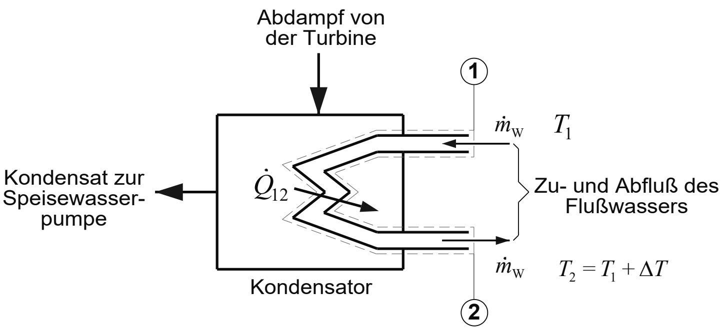


Bild 3.1 System mit Bilanzhülle

Gesucht:

Wie groß ist der Wasser-Massenstrom $\dot{m}_W$, der dem Fluss entnommen werden muss, wenn eine Temperaturerhöhung von $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$ zugelassen wird.

Lösung:

1. Hauptsatz für offenes System:

$$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m}_W \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) \right] \qquad P_{12} = 0$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_W \left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) \right] \qquad c_1 = c_2 \qquad z_1 = z_2$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_W \left(h_2 - h_1 \right)$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_{\mathrm{W}} \left(u_2 + p_2 \cdot v_2 - u_1 - p_1 \cdot v_1\right) \qquad p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_{\mathrm{W}} \left(u_2 - u_1\right) = \dot{m}_{\mathrm{W,Kond.}} \int_1^2 c_{\mathrm{W}} \left(T\right) \mathrm{d}T$$

$$\int_1^2 c_{\mathrm{W}} \left(T\right) \mathrm{d}T = c_{\mathrm{W,m}} \left(T_2 - T_1\right)$$

Da die spezifische Wärme von Wasser nur geringfügig von der Temperatur abhängt, kann mit dem Mittelwert $c_{\mathrm{W,m}}$ gerechnet werden.

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_{\mathrm{W}} \cdot c_{\mathrm{Wm}} \left(T_2 - T_1\right)$$

$$\boldsymbol{c_{\mathrm{W,m}} = 4{,}18 \; \frac{\mathbf{kJ}}{\mathbf{kg \cdot K}}}$$

$$\dot{m}_{\mathrm{W}} = \frac{\dot{Q}_{12}}{c_{\mathrm{W,m}} \left(T_2 - T_1\right)} = \frac{\dot{Q}_{12}}{c_{\mathrm{W,m}} \cdot \Delta T} = \frac{273 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{h}}}{4{,}18 \, \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} 20\,\mathrm{K}} = \frac{273 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{kJ}}{3{,}6 \cdot 10^3 \mathrm{s}}}{4{,}18 \, \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} 20\,\mathrm{K}}$$

$$\dot{m}_{\mathrm{W}} = 907{,}1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 907{,}1 \frac{10^{-3}\,\mathrm{t}}{\frac{1}{3{,}6 \cdot 10^3} \mathrm{h}} = 907{,}1 \; \frac{10^{-3}\,\mathrm{t} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3}{\mathrm{h}}$$

$$\dot{m}_{\mathrm{W}} = 907{,}1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 907{,}1 \frac{10^{-3}\,\mathrm{t}}{\frac{1}{3{,}6 \cdot 10^3} \mathrm{h}} = 907{,}1 \; \frac{10^{-3}\,\mathrm{t} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3}{\mathrm{h}}$$

$$\dot{m}_{\mathrm{W}} = 3265{,}6 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{h}}$$

Aufgabe 4

1. Hauptsatz für offenes System, Pumpspeicherwerk, Druck und Geschwindigkeit an unterschiedlichen Stellen der Anlage, Pumpen- und Turbinenleistung, Festlegung von Bilanzhüllen

Vorstellung:

In einem Pumpspeicherwerk besteht ein Maschinensatz aus einer Pumpe, einer Turbine und einer elektrischen Maschine. Während der Nacht arbeitet die elektrische Maschine als Motor und treibt die Pumpe an, die Wasser aus einem Fluss in ein Speicherbecken pumpt, dessen Wasserspiegel 280 m über dem Fluss liegt.

Tagsüber wird mit dem Wasser des Speicherbeckens die Turbine angetrieben. Diese treibt die elektrische Maschine an, die nun als Generator arbeitet und elektrische Energie in das Netz einspeist (Bild 4.1).

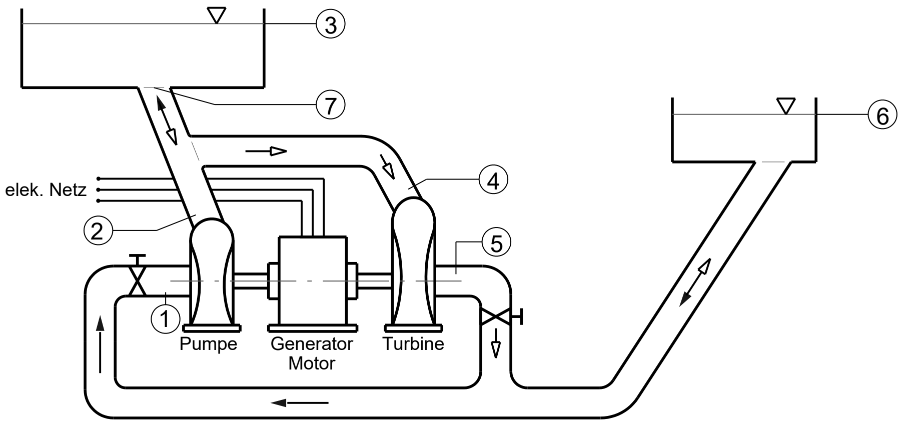


Bild 4.1 Pumpspeicherwerk mit Maschinensatz

Die Strömung durch Pumpe und Turbine sowie alle Wasserleitungen sollen als reibungsfrei betrachtet werden. Das Wasser kann als inkompressible Flüssigkeit behandelt werden. Die elektrische Maschine soll elektrische Energie vollständig in mechanische Energie umwandeln.

Der Umgebungsdruck beträgt p_u = 1 bar.

Gesucht:

1. Pumpenleistung P_{63}
2. Geschwindigkeit am Eintritt der Pumpe c_1
3. Druck am Austritt der Pumpe p_2
4. Geschwindigkeit c_7 und Druck p_7 an der Mündung das Druckstollens in das Speicherbecken
5. Massenstrom durch die Turbine $\dot{m}_T$
6. Turbinenleistung P_{45}

Lösung:

1. **Pumpenleistung P_{63}**

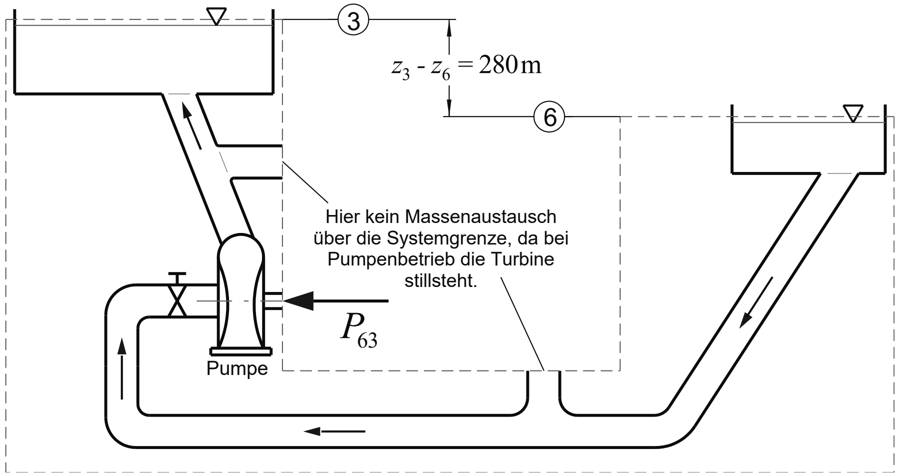


Bild 4.2 Bilanzhülle zur Berechnung der Pumpenleistung

1. Hauptsatz für offenes System (Bild 4.2):

$$\dot{Q}_{63} + P_{63} = \dot{m}_P \left[h_3 - h_6 + \frac{1}{2}\left(c_3^2 - c_6^2\right) + g\left(z_3 - z_6\right) \right] \qquad \dot{Q}_{63} = 0$$

$$P_{63} = \dot{V}_P \cdot \rho_W \left[h_3 - h_6 + \frac{1}{2}\left(c_3^2 - c_6^2\right) + g\left(z_3 - z_6\right) \right]$$

$$P_{63} = \dot{V}_P \cdot \rho_W \left[u_3 + p_3 \cdot v_3 - u_6 - p_6 \cdot v_6 + \frac{1}{2}\left(c_3^2 - c_6^2\right) + g\left(z_3 - z_6\right) \right]$$

$u_3 = u_6 \qquad T_3 = T_6$, reibungsfrei

$p_3 = p_6 = p_u \qquad v_3 = v_6$, inkompressibel $\qquad c_3 = 0 \qquad c_6 = 0$

$P_{63} = \dot{V}_P \cdot \rho_W \cdot g\left(z_3 - z_6\right) \qquad z_3 - z_6 = 280\,\text{m}$

$$\boldsymbol{\dot{V}_P = 21{,}1\frac{m^3}{s}}$$

$$\boldsymbol{\rho_W = 1000\frac{kg}{m^3}}$$

$$P_{63} = 21{,}1\frac{\text{m}^3}{\text{s}}1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}280\,\text{m} = 21{,}1\cdot 1000\cdot 9{,}81\cdot 280\frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$P_{63} = 58000\cdot 10^3\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 58000\,\text{kW} = 58\,\text{MW}$$

2. Geschwindigkeit am Eintritt der Pumpe c_1

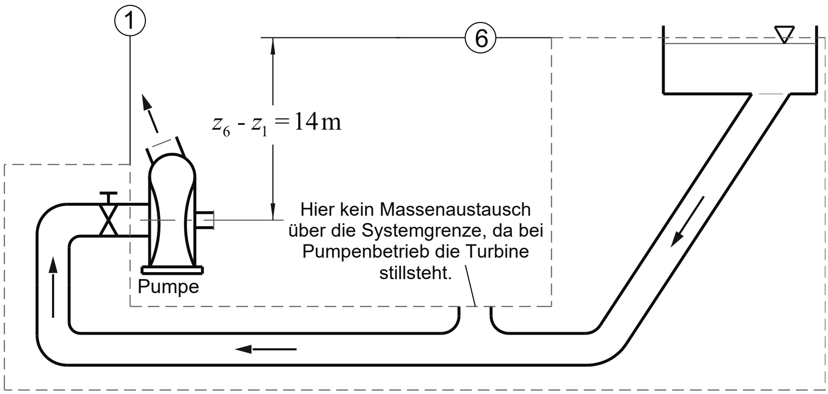


Bild 4.3 Bilanzhülle zur Berechnung der Geschwindigkeit am Eintritt der Pumpe

1. Hauptsatz für offenes System (Bild 4.3):

$$\dot{Q}_{61} + P_{61} = \dot{m}_P\left[h_1 - h_6 + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_6^2\right) + g\left(z_1 - z_6\right)\right] \qquad \dot{Q}_{61} + P_{61} = 0$$

$$0 = h_1 - h_6 + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_6^2\right) + g\left(z_1 - z_6\right)$$

$$0 = \left[u_1 + p_1\cdot v_1 - u_6 - p_6\cdot v_6 + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - c_6^2\right) + g\left(z_1 - z_6\right)\right]$$

$u_1 = u_6 \qquad T_1 = T_6$, reibungsfrei $\qquad c_6 = 0 \qquad z_1 - z_6 = -14\,\mathrm{m}$

$$0 = p_1 \cdot v_1 - p_6 \cdot v_6 + \frac{1}{2} c_1^2 + g\left(z_1 - z_6\right)$$

$$-\frac{1}{2} c_1^2 = p_1 \cdot v_1 - p_6 \cdot v_6 + g\left(z_1 - z_6\right)$$

$$\frac{1}{2} c_1^2 = -p_1 \cdot v_1 + p_6 \cdot v_6 - g\left(z_1 - z_6\right)$$

Aus Konstruktionsgründen muss an der Stelle 1 ein Druck von

$$\boldsymbol{p_1 = 12\,\mathrm{mWS} = 1{,}176766\,\mathrm{bar}}$$

herrschen.

$$c_1^2 = 2\left[-p_1 \cdot v_1 + p_6 \cdot v_6 - g\left(z_1 - z_6\right)\right] = 2\left[\frac{1}{\rho_\mathrm{W}}\left(-p_1 + p_6\right) - g\left(z_1 - z_6\right)\right]$$

$$p_6 = p_\mathrm{u} = 1\,\mathrm{bar} = 1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$-p_1 + p_\mathrm{u} = -1{,}176766 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + 1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = -0{,}176766 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$c_1^2 = 2\left[\frac{1}{10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\left(-0{,}176766 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right) - g\left(-14\,\mathrm{m}\right)\right]$$

$$c_1^2 = 2\left[\frac{1}{10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\left(-0{,}176766 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right) + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,14\,\mathrm{m}\right]$$

$$c_1^2 = 2\left[-17{,}6766\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,14\,\mathrm{m}\right] = 239{,}3268\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$c_1 = 15{,}47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$