

# 1 Statik

## Was ist Technische Mechanik?

Die Mechanik ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf Körper. Sie ist ein Teilgebiet der Physik. Die Technische Mechanik wendet physikalische Gesetze auf technische Probleme an und entwickelt dabei grundlegende Methoden und Berechnungswege, um das mechanische Verhalten von realen technischen Systemen untersuchen, beschreiben und beurteilen zu können.

Die Technische Mechanik unterteilt man nach der Beschaffenheit der betrachteten Körper in die Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Das vorliegende Buch behandelt ausschließlich die Technische Mechanik fester Körper (Festkörpermechanik). Dieses Gebiet wird üblicherweise weiter unterteilt in

- Statik
- Festigkeitslehre und
- Dynamik.

Diese Unterteilung liegt auch dem vorliegenden Buch zu Grunde.

Die Statik – genauer die Statik fester Körper –, der wir uns im *Kapitel 1* zuwenden, ist die Lehre von der Wirkung von Kräften auf starre Körper im Gleichgewichtszustand. Die Beanspruchung der betrachteten Körper wird dabei als zeitlich unveränderlich vorausgesetzt. Es ist das Ziel der Statik, Bedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) für die angreifenden Kräfte zu formulieren, unter denen ein Körper oder ein Körpersystem in Ruhe bleibt.

## 1.1 Grundlagen

### 1.1.1 Starrer Körper

Von einem starren Körper sprechen wir dann, wenn der Abstand zwischen zwei Punkten auf dem Körper bei beliebigen Belastungen unverändert bleibt. In der Statik vernachlässigen wir also die Verformung eines Körpers unter der Wirkung von Kräften.

Ein starrer Körper ist die Idealvorstellung eines Körpers, der unter Krafteinwirkung keine Verformung erfährt.

Natürlich ist ein realer Körper niemals ein starrer Körper. Das Modell eines starren Körpers ist aber in vielen Fällen eine für technische Bauteile und Konstruktionen zweckmäßige Annahme. Diese Annahme muss aber unbedingt kritisch überprüft werden, um die Gültigkeit der daraus folgenden Berechnungsergebnisse sicherzustellen. Die Annahme ist zulässig, wenn die Verformungen infolge der Einwirkung von äußeren Kräften so gering sind, sodass die Lageänderung der angreifenden Kräfte im Rahmen der Rechengenauigkeit vernachlässigt werden kann. Jeder reale Körper unter der Wirkung von äußeren Belastungen, der sich in Ruhe – d. h. im Gleichgewicht – befindet, kann gedanklich in einen starren Körper verwandelt werden (*Erstarrungsprinzip*).

### 1.1.2 Kraft

Der zentrale Begriff der Statik ist die Kraft. Als Urbilder der Kraft können die Gewichtskraft und die Muskelkraft angesehen werden. Die Muskelkraft kann erfahrungsgemäß an einem Körper im Schwerfeld der Erde Gleichgewicht herstellen. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist bzw. nicht beschleunigt wird. Der Kraftbegriff in der Statik kann daher folgendermaßen definiert werden.

Jede physikalische Größe, die sich mit der Gewichtskraft ins Gleichgewicht setzen lässt, ist eine Kraft.

Aus der Erfahrung ist auch bekannt, dass eine Kraft in der Lage ist, eine ruhende Masse in Bewegung zu versetzen oder den Bewegungszustand von Körpern zu ändern. Mit derartigen Fragen befassen wir uns im *Kapitel 3 Dynamik*. Die Wirkung von Kräften auf Körper führt zu Deformationen an diesen Körpern, deren Berechnung Gegenstand des *Kapitels 2 Festigkeitslehre* ist.

Weitere Beispiele für Kräfte sind: magnetische und elektrische Kräfte, Druckkräfte von Flüssigkeiten und Gasen, Windkräfte, Federkräfte usw. Kräfte sind Vektoren und daher durch die Größen

- Betrag
- Richtung
- Richtungssinn und
- Angriffspunkt

bestimmt. Zur Kennzeichnung von Vektoren in Formeln wird das entsprechende Symbol mit einem Vektorpfeil versehen. Der Kraftvektor wird üblicherweise durch  $\vec{F}$  (von force) gekennzeichnet. Der Betrag des Kraftvektors wird durch  $|\vec{F}| = F$  dargestellt (eventuell wird  $F$  mit einem Index versehen, der den Angriffspunkt und/oder die Richtung kennzeichnet).

Für die maßstäbliche zeichnerische Darstellung der Kraft benötigt man die Richtung (auch als Wirkungslinie WL bezeichnet) des Kraftvektors  $\vec{F}$ , den Angriffspunkt AP der Kraft, und die Vektorlänge  $e$ . Die Pfeilspitze legt den Richtungssinn auf der Wirkungslinie WL fest (Bild 1.1). Um den Betrag von  $\vec{F}$  als Vektorlänge  $e$  darstellen zu können, muss man einen Maßstabsfaktor  $m_F$  festlegen. Mit dem Maßstabsfaktor ergibt sich die zeichnerische Vektorlänge  $e$  zu

$$e = \frac{1}{m_F} F \quad \text{mit } F \text{ in N} \quad \text{und} \quad m_F \text{ in } \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Die Einheiten der Kraft (gesetzlich verbindlich) lauten:

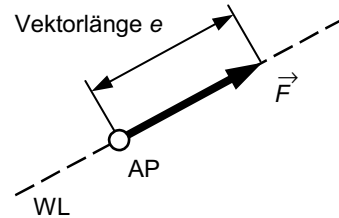
$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N} \quad (\text{alt: } 1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N})$$

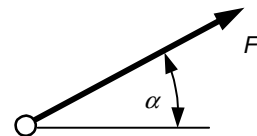
In dem vorliegenden Buch verzichten wir auf die Erläuterung von grafischen Verfahren zu Ermittlung von Kräften. Unsere Skizzen sind daher nicht streng maßstäblich und dienen im Wesentlichen der prinzipiellen Darstellung von Kräften. Das Pfeilbild einer Kraft gibt die Lage, die Richtung und den Richtungssinn an und wird durch die Angabe des Betrages  $F$  und des Richtungswinkels  $\alpha$  ergänzt (siehe Bild 1.2).

In der Mechanik unterscheiden wir

- räumlich verteilte Kräfte (z. B. Gewichtskraft, elektrische und magnetische Kräfte),
- flächenhaft verteilte Kräfte (z. B. Druckkräfte von Flüssigkeiten und Gasen) sowie
- Einzelkräfte



**Bild 1.1** Zeichnerische Darstellung eines Vektors



**Bild 1.2** Skizze eines Kraftvektors

Eine Einzelkraft ist ein idealisierter Grenzfall. Sie kann z. B. durch eine Seilkraft veranschaulicht werden, bei der der Angriffsbereich eine sehr kleine Querschnittsfläche des Seiles ist. Eine Einzelkraft kann am starren Körper als ein linienflüchtiger Vektor angenommen werden. Es gilt der folgende Satz (wichtiges Axiom der Statik der starren Körper):

An einem starren Körper kann eine Einzelkraft beliebig entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass sich ihre Wirkung auf den starren Körper ändert.

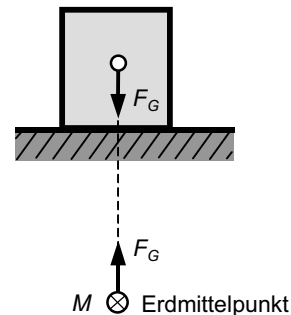


### 1.1.3 Wechselwirkungsprinzip

Das Wechselwirkungsprinzip geht auf NEWTON<sup>1</sup> (1687) zurück, der die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung postulierte.

Zu jeder Kraft gehört auf der gleichen Wirkungslinie eine Gegenkraft von gleichem Betrag, aber mit entgegengesetztem Richtungssinn.

Eine Kraft tritt also niemals allein auf, sondern es gehört zu jeder Kraft eine gleich große Gegenkraft (siehe *Bild 1.3*). Das gilt beispielsweise auch für Kräfte, die an Körpern wirken, die sich nicht berühren (z. B. Gravitationskräfte zwischen Himmelskörpern, magnetische Kräfte).



**Bild 1.3** Wechselwirkungsprinzip

### 1.1.4 Schnittprinzip

Ein Körper kann mittels eines gedachten Schnittes von seiner Umgebung befreit werden. Die dadurch verlorengegangene gegenseitige Beeinflussung zwischen Körper und Umgebung muss danach durch geeignet gewählte Kräfte ersetzt werden, die den ursprünglichen Ruhezustand (oder Bewegungszustand, siehe *Kapitel 3 Dynamik*) des Körpers wieder herstellen. Durch dieses grundlegende Prinzip wird es möglich, innere Kräfte eines technischen Systems sichtbar und damit berechenbar zu machen. Im *Bild 1.4* wurde beispielsweise der Körper aus *Bild 1.3* von seiner Unterlage befreit und die Wirkung der Unterlage auf den Körper sowie die Wirkung des Körpers auf seine Unterlage durch die Kraft  $F_N$  ersetzt.

<sup>1</sup> ISAAC NEWTON (1643 – 1727), englischer Mathematiker, Physiker und Astronom

### 1.1.5 Reaktionskräfte und eingeprägte Kräfte

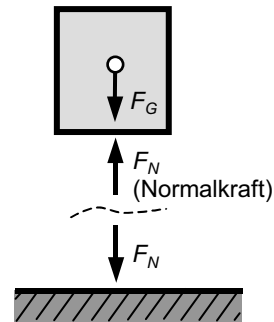
Durch Lagerungen oder Abstützungen kann ein starrer Körper erfahrungsgemäß in seiner Lage fixiert werden – der Körper ist dann an seine Lage gebunden. Kräfte, die bei der Anwendung des Schnittprinzips die Wirkung der Lager oder der Stützen ersetzen, nennt man *Reaktionskräfte* (oder auch *Bindungskräfte*). Der Angriffspunkt und die Wirkungslinie einer Reaktionskraft werden durch die von der zugehörigen Bindung verhinderten Bewegung des Körpers bestimmt (vgl. *Kapitel 1.4.2*).

Alle Kräfte, die nicht durch starre Bindungen (Lagerungen, Abstützungen) bedingt sind, heißen *eingeprägte Kräfte*.

### 1.1.6 Gleichgewicht

Das Gleichgewichtsprinzip der Statik sagt aus, dass ein starrer Körper dann im Gleichgewicht ist, wenn er sich im Zustand der Ruhe (oder der gleichförmigen Bewegung) befindet.

In diesem Sinne wurde der Begriff schon in den vorhergehenden Kapiteln gebraucht. Wenn wir einen starren Körper aus der Umgebung freischnneiden, alle Bindungen durch Reaktionskräfte ersetzen und auch die eingeprägten Kräfte antragen, liegt ein geometrisch bekannter Körper unter der Wirkung von Kräften vor. Wenn die Kräfte den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung nicht verändern, befindet sich der Körper im Gleichgewicht.



**Bild 1.4** Schnittprinzip und Gleichgewicht

Der einfachste Fall einer Gleichgewichtsgruppe von Kräften liegt offensichtlich vor, wenn ein Körper unter der Wirkung von nur zwei Kräften steht (*Bild 1.4*). Dann herrscht Gleichgewicht, wenn die beiden Kräfte

1. die gleiche Größe (gleichen Betrag) haben,
2. entgegengesetzt zueinander gerichtet sind und
3. auf der gleichen Wirkungslinie liegen.

Diese durch die Erfahrung bestätigte Erkenntnis kann auf die Wirkung von beliebig vielen Kräften verallgemeinert werden (siehe *Kapitel 1.2*).

### 1.1.7 Äquivalenz von Kräften

Der Begriff Gleichgewicht soll noch durch den dualen Begriff Äquivalenz ergänzt werden.

Eine Gruppe von Kräften nennt man äquivalent (mechanisch gleichwertig) zu einer zweiten Gruppe von Kräften, wenn beide für sich an demselben starren Körper die gleiche mechanische Wirkung hervorrufen.

Für einen starren Körper sind unendlich viele Kräftegruppen denkbar, die zu einer gegebenen Kräftegruppe äquivalent sind. So sind beispielsweise zwei nach Betrag und Richtungssinn gleiche Kräfte auf der gleichen Wirkungslinie mit unterschiedlichem Angriffspunkt am starren Körper äquivalent.

Aus dem Gleichgewichts- bzw. Äquivalenzprinzip werden wir in den folgenden Kapiteln mathematische Gleichgewichts- bzw. Äquivalenzbedingungen ableiten, aus denen wir unbekannte Kräfte berechnen können.

## 1.2 Zentrales ebenes Kraftsystem

Eine Gruppe von Kräften, die an einem starren Körper angreift und in einer Ebene liegt, heißt zentrales ebenes Kraftsystem, wenn sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden.

### 1.2.1 Resultierende

Eine Gruppe von Kräften  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  lässt sich durch eine äquivalente Kraft, die sogenannte *Resultierende*  $\vec{F}_R$ , ersetzen. Die Resultierende ist den Kräften  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  äquivalent.

#### Grafische Lösung<sup>2</sup>

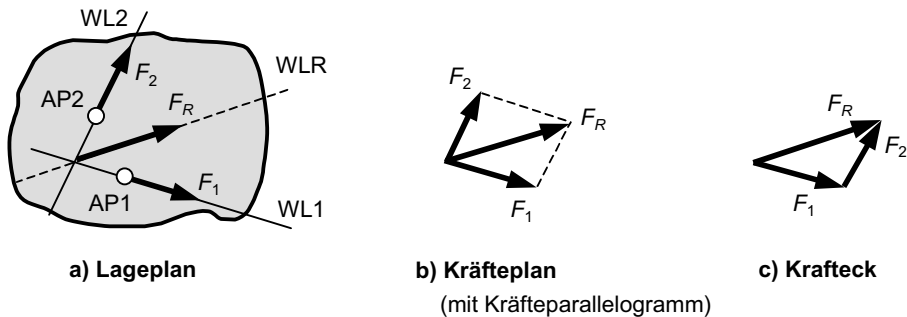
Wir betrachten zunächst nur zwei Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$ . Das *Bild 1.5 a)* zeigt den Lageplan, der die Angriffspunkte, die Lage der Wirkungslinien und die Richtung der beiden Kräfte zeigt. Der Lageplan wird üblicherweise unter Verwendung eines Längenmaßstabes gezeichnet, in den die Winkel der Wirkungslinien korrekt

---

<sup>2</sup> Die Anwendung grafischer Methoden dient nachfolgend vorwiegend zur Veranschaulichung. Die Lösung von Aufgaben erfolgt stets analytisch.

eingetragen werden. Im Kräfteplan (*Bild 1.5 b*) werden Betrag und Richtung der Kräfte unter Nutzung eines Kraftmaßstabes gezeichnet, wobei hier die Lage der Kräfte nicht mehr erfasst werden kann.

**Parallelogrammsatz:**<sup>3</sup> Zwei Kräfte lassen sich im Kräfteplan grafisch zu einer Resultierenden zusammenfassen, die nach Größe und Richtung durch die Diagonale in einem Parallelogramm bestimmt wird, dessen Seiten von den beiden (maßstäblich gezeichneten) Kräften aufgespannt werden.



**Bild 1.5** Lageplan, Kräfteplan, Krafteck

Der Parallelogrammsatz der Statik entspricht mathematisch dem Additionsgesetz von Vektoren, das wir nachfolgend für die analytische Ermittlung der Resultierenden benutzen werden. Das *Bild 1.5 b*) zeigt den Kräfteplan mit dem Kräfteparallelogramm.

Das Krafteck in *Bild 1.5 c*) ist eine Vereinfachung des Kräfteparallelogramms, bei dem die Reihenfolge der Kräfte beliebig ist.

Nach der beschriebenen grafischen Ermittlung der Resultierenden im Kräfteplan wird diese auf der resultierenden Wirkungslinie (WLR) in den Lageplan eingezeichnet.

Eine Umkehrung der Aufgabe, d. h. die Zerlegung einer Kraft in beliebig viele Komponenten ist nicht möglich. Eine Kraft kann in der Ebene eindeutig nur in zwei Komponenten zerlegt werden!

<sup>3</sup> Der Parallelogrammsatz ist ein Axiom, das weder bewiesen noch auf einfachere Aussagen zurückgeführt werden kann. Seine Richtigkeit hat sich dadurch bestätigt, dass alle Folgerungen aus diesem Axiom zu widerspruchsfreien, mit der Praxis übereinstimmenden Ergebnissen geführt haben.

### Analytische Lösung<sup>4</sup>

Wie bereits erwähnt, können auf Kräfte die Regeln der Vektorrechnung angewandt werden. Für die Zusammensetzung von  $n$  Kräften zu einer Resultierenden gilt folglich:

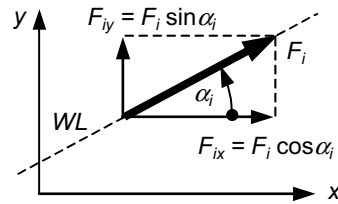
$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n \quad (1.1)$$

In Komponentenschreibweise bezogen auf ein  $(x,y)$ -Koordinatensystem (*Bild 1.6*) gilt für die Resultierenden in  $x$ -Richtung  $F_{Rx}$  und in  $y$ -Richtung  $F_{Ry}$ <sup>5</sup>

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (1.2)$$

Sind die Kräfte  $\vec{F}_i$  mit ihren Beträgen  $F_i$  und den Winkeln  $\alpha_i$  (Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und den Kräften  $\vec{F}_i$  im mathematisch positiven Sinn, d. h. für die Lage des Koordinatensystems in *Bild 1.6* im Gegenuhrzeigersinn) gegeben, so kann man die Kräfte in ihre Komponenten in Richtung der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse zerlegen und erhält

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i \quad (1.3)$$



**Bild 1.6** Komponenten einer Kraft



**Hinweis:** Verwendet man die oben angegebene Definition für die Winkel  $\alpha_i$  (Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und den Kräften  $\vec{F}_i$  im mathematisch positiven Sinn), so wird in *Gleichung (1.3)* das richtige Vorzeichen der Kraftkomponenten automatisch über die Winkelfunktionen berücksichtigt.

Für die Resultierende ergibt sich dann

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad (1.4)$$

<sup>4</sup> Die Anwendung grafischer Methoden dient nachfolgend vorwiegend zur Veranschaulichung. Die Lösung von Aufgaben erfolgt stets analytisch.

<sup>5</sup> Kraftkomponenten werden mitunter auch nach der Richtung, in der sie liegen, indiziert. Zum Beispiel  $H$  für eine horizontal liegende Kraftkomponente und  $V$  für eine vertikal liegende Kraftkomponente. Nachteil: Es muss eine eindeutige Festlegung getroffen werden, wann so indizierte Kraftkomponenten positiv sind.



Die Lage der Resultierenden wird durch den Winkel  $\alpha_R$  bestimmt, der sich aus

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \quad (1.5)$$

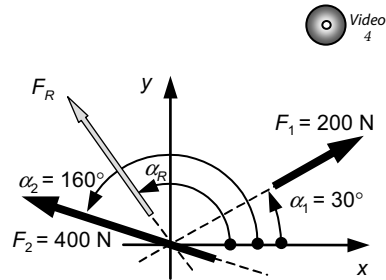
ergibt. Da für  $\alpha_R$  noch zwei Quadranten möglich sind, bildet man für die Eindeutigkeit des Richtungssinns noch

$$\sin \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_R} \quad (1.6)$$

### Beispiel 1.1 Resultierende zweier Kräfte

Für die im Lageplan des *Bildes 1.7* dargestellten zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  soll die Resultierende ermittelt werden.

Wir wollen hier zunächst die Berechnung der Resultierenden nach den oben angegebenen allgemeinen Gleichungen vornehmen, um dann als weitere Möglichkeit die Berechnung vorzustellen, wie sie für praktische Belange meist zweckmäßiger ist.



**Bild 1.7** Resultierende zweier Kräfte

*Berechnung mit den Gleichungen (1.3) – (1.6)*

Da die Winkel zur Beschreibung der Lage der Kräfte im  $(x,y)$ -Koordinatensystem nach obiger Definition bekannt sind, folgen unmittelbar aus *Gleichung (1.3)* die Komponenten der resultierenden Kraft zu

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n=2} F_i \cos \alpha_i = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = (200 \cdot \cos 30^\circ + 400 \cdot \cos 160^\circ) \text{ N}$$

$$\underline{F_{Rx}} = (173,2 - 375,9) \text{ N} = \underline{-202,7 \text{ N}}$$

bzw.

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n=2} F_i \sin \alpha_i = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = (200 \cdot \sin 30^\circ + 400 \cdot \sin 160^\circ) \text{ N}$$

$$\underline{F_{Ry}} = (100 + 136,8) \text{ N} = \underline{236,8 \text{ N}}$$

Der Betrag der Resultierenden ergibt sich aus *Gleichung (1.4)*

$$\underline{\underline{F_R}} = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-202,7)^2 + 236,8^2} \text{ N} = \underline{\underline{311,7 \text{ N}}}$$

und für den Winkel der Resultierenden in Bezug auf das  $(x,y)$ -Koordinatensystem erhalten wir aus *Gleichung (1.5)*

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{236,8 \text{ N}}{-202,7 \text{ N}} = -1,168 \quad \Rightarrow \quad \text{zwei Lösungen für } \alpha_R$$

$$\alpha_{R,1} = -49,43^\circ$$

$$\alpha_{R,2} = 180^\circ + \alpha_{R,1} = 130,57^\circ$$

Für die Eindeutigkeit des Winkels berechnen wir noch mit *Gleichung (1.6)*

$$\sin \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{236,8 \text{ N}}{311,7 \text{ N}} = 0,7597 \quad \Rightarrow \quad \text{zwei weitere Lösungen für } \alpha_R$$

$$\alpha_{R,3} = 49,43^\circ$$

$$\alpha_{R,4} = 180^\circ - \alpha_{R,3} = 130,57^\circ$$

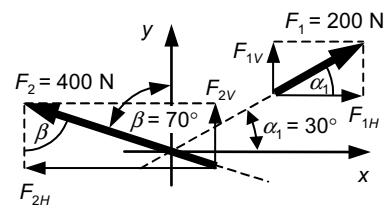
Der gesuchte Winkel  $\alpha_R$  muss die beiden *Gleichungen (1.5)* und *(1.6)* erfüllen. Das trifft nur für den Winkel von  $130,57^\circ$  zu. Damit hat die Resultierende den Richtungswinkel

$$\underline{\underline{\alpha_R = 130,57^\circ}}$$

Die Resultierende kann jetzt auf einer Wirkungslinie durch den Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien von  $F_1$  und  $F_2$  mit dem Richtungswinkel  $\alpha_R$  eingezeichnet werden (siehe *Bild 1.7*).

*Weitere Berechnungsmöglichkeit:*

Die 2. Berechnungsmöglichkeit beruht darauf, dass zunächst nur die Beträge der Kraftkomponenten – in der Regel aus Winkeln zwischen  $0$  und  $\pi/2$  zu einer der Koordinatenachsen – berechnet werden. Das richtige Vorzeichen der Kraftkomponenten für das Aufschreiben der *Gleichung (1.2)* muss dann aus der Anschauung gewonnen werden. Für dieses Beispiel erhalten wir (vgl. Kraftzerlegung in *Bild 1.8*):



**Bild 1.8** Komponenten von  $F_1$  und  $F_2$

$$\underline{F_{Rx}} = F_{1H} - F_{2H} = F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \sin \beta = (173,2 - 375,9) \text{ N} = \underline{-202,7 \text{ N}}$$

$$\underline{F_{Ry}} = F_{1V} + F_{2V} = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \cos \beta = (100 + 136,8) \text{ N} = \underline{236,8 \text{ N}}$$

Wie man sieht, erhält man die gleichen Komponenten für die Resultierende. Die Rechnung wird dann wie oben fortgesetzt. Bei der Berechnung des Richtungswinkels  $\alpha_R$  kann man sich auf die *Gleichung (1.5)* beschränken, wenn der richtige Winkel von den zwei möglichen wiederum aus der Anschauung (Beurteilung der Vorzeichen von  $F_{Rx}$  und  $F_{Ry}$ ) gewonnen wird. Da in diesem Beispiel  $F_{Rx}$  negativ und  $F_{Ry}$  positiv ist, kann die Resultierende nur

unter dem Winkel von  $\alpha_R = 130,57^\circ$  verlaufen. Die andere Lösung aus *Gleichung (1.5)* mit  $\alpha_R = -49,43^\circ$  würde bedeuten, dass  $F_{Rx}$  positiv und  $F_{Ry}$  negativ sein müssten (Kraft genau entgegengesetzt zu  $F_R$ ), was hier nicht der Fall ist.

## 1.2.2 Gleichgewicht von Kräften

Das Kraftgleichgewicht ist, wie wir bereits im *Kapitel 1.1.6* festgestellt haben, die Bedingung für die Ruhe bzw. für die gleichförmige Bewegung eines Systems.

Eine zentrale ebene Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende gleich null ist.

### Analytische Lösung

Wir fordern, dass die Summe aller Kräfte in zwei beliebigen Richtungen – meist nutzen wir dazu die  $x$ -Richtung (Index  $x$ ) und die  $y$ -Richtung (Index  $y$ ) oder die horizontale Richtung (Index  $H$ ) und die vertikale Richtung (Index  $V$ ) – und schreiben

$$F_{Rx} = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_{RH} = 0 \quad \text{oder symbolisch:} \quad \rightarrow : \quad (1.7)$$

$$F_{Ry} = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_{RV} = 0 \quad \text{oder symbolisch:} \quad \uparrow : \quad (1.8)$$

Da das Gleichgewicht in jeder beliebigen Richtung aufgeschrieben werden kann, gibt es unendlich viele Gleichgewichtsbedingungen. Da von diesen jedoch nur zwei linear unabhängig sind, können nur zwei Unbekannte berechnet werden. Weitere Gleichgewichtsbedingungen können gegebenenfalls zur Kontrolle benutzt werden.

## 1.2.3 Lagerungsbedingungen<sup>6</sup>

Seile, Stäbe und reibungsfreie Auflagen sind wichtige technische Realisierungen der Lagerung von starren Körpern. Wenn wir einen starren Körper mit Hilfe des Schnittprinzips von seinen Lagerungen befreien, werden die Lagerkräfte sichtbar.

### Seile und Stäbe

Seile und Stäbe können nur Kräfte in Längsrichtung aufnehmen. Wir führen einen Schnitt durch das Seil oder den Stab und tragen eine Zugkraft (Zugkräfte sind dann

---

<sup>6</sup> Weitere Lagerungsbedingungen werden im *Kapitel 1.4.2* behandelt.

# Sachwortverzeichnis

## A

- Abklingkonstante 295
- Abscheren 186, 188
- Abscherspannungen 186
- Abstimmverhältnis 302, 303
- Allgemeines Kraftsystem
  - ebenes 24
  - räumliches 79
- Amplitude 282, 288
- Anfangsbedingungen 221, 222, 224, 286
- angefachte Schwingung 283
- aperiodischer Grenzfall 300

## Ä

- Äquivalenz 16

## A

- Arbeit 256
  - für Kräfte ohne Potenzial 272
  - für Momente ohne Potenzial 272
- Arbeitssatz 257
- Auslenkungsverhältnis 309, 310
- axiales Massenmoment 244

## B

- Bahngeschwindigkeit 216
- Bahnkoordinaten 216
- Bahnkurve 214
- Balken 33
- Balkenachse 145
- Beanspruchungsarten
  - Flächenpressung 120, 141
  - Querkraftschub 120, 167
  - reine Biegung 119, 145
  - Scherbeanspruchung 120
  - Stabilität (Knicken) 119, 204
  - Torsion 119, 175

- Zug/Druck 119, 131
- Zusammengesetzte Beanspruchung 189
- Beanspruchungsgrößen 116
  - Spannungen 116
- Belastbarkeitsrechnung
  - bezüglich Festigkeit 117
  - bezüglich Steifigkeit 117
- BERNOULLI-Hypothese 146
- Beschleunigung 214
  - in Bahnkoordinaten 217
  - in kartesischen Koordinaten 215
  - in Polarkoordinaten 219
  - Kreisbewegung 220
- Beschleunigungs-Zeit-Gesetz 225
- Bewegungsdifferenzialgleichung 261, 265, 285 *Siehe auch*
  - Bewegungsgleichungen, Differenzialgleichung
- Bewegungsgesetze 213, 221, 222, 225
  - Beschleunigungs-Zeit-Gesetz 225
  - Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz 222, 224, 225
  - Weg-Zeit-Gesetz 222, 224, 225
- Bewegungsgleichungen 213, 250
  - Berechnungsablauf 250
- Bewegungskoordinaten 222
- Biegelinie 152
  - Differenzialgl. 2. Ordnung 153
  - Differenzialgl. 4. Ordnung 153
- Biegemoment 60, 86, 119, 145
- Biegesteifigkeit 153
- Biegewiderstandsmoment 149
- Biegewinkel 154
- Biegung 119, 145
  - Differenzialgl. 2. Ordnung 153
  - Differenzialgl. 4. Ordnung 153

- gerade 146
  - schiefe 164
  - Spannungen 146, 164
  - Verformung 151, 165
- BREDTsche Formeln 184

**C**

- charakteristische Gleichung 296, 308  
 Coulombsches Gleitreibungsgesetz 94  
 COULOMBSches Haftungsgesetz 91

**D**

- D'ALEMBERTsche Kraft 237, 238, 244  
 D'ALEMBERTsches Moment 244  
 D'ALEMBERTsches Prinzip 213, 236
- für ebene Bewegung starrer Körper 244
  - für Punktmassen 236
  - Vorgehensweise 238
- Dämpfung 294
- schwach gedämpftes System 297
  - stark gedämpftes System 300
- Dämpfungsgrad 295, 296  
 Dämpfungskonstante 294  
 Dämpfungsmatrix 306  
 Deformation 123  
 Deformationsgrößen 116
- Dehnung 116, 123, 126, 127, 128, 131
  - Gleitung 123, 129
  - Verschiebung 116, 123
  - Verzerrung 116, 123
- Deformationstensor 125  
 Deformationszustand 123
- räumlicher 125
- deformierbarer Körper 115  
 Dehnsteifigkeit 133  
 Dehnung 116, 123, 126, 127, 128, 131  
 Deviationsmoment 104  
 Differenzialgleichung 153, 285 *Siehe*  
 auch  
 Bewegungsdifferenzialgleichung,  
 Bewegungsgleichungen
- der Biegelinie 153
  - Hinweis zur Lösung 154, 288
  - homogene 285, 295

- homogene Lösung 286, 288, 296, 301, 307
  - inhomogene 301
  - partikuläre Lösung 301, 307
- Differenzielle Beziehungen 65  
 Dimensionierung
- bezüglich Festigkeit 116
  - bezüglich Steifigkeit 116
- Dissipation (Energiedissipation) 294  
 Drehzahl 221, 282  
 Dreigelenkträger 44  
 Drillung 176  
 Druck 119, 131  
 Dynamik 213

**E**

- ebener Spannungszustand 191, 195  
 Eigenfrequenz 287  
 Eigenkreisfrequenz 285, 290, 291, 298, 300, 305, 310  
 Eigenschwingformen 310  
 Eigenschwingungen 284  
 Eigenwert 208  
 Eigenwertgleichung 206, 208  
 Eigenwertproblem 308  
 einachsiger Spannungszustand 126, 132  
 eingeprägte Kräfte 15  
 Einheitsvektoren 215
- für kartesische Koordinaten 215
  - in  $r$ - und  $\varphi$ -Richtung 218
  - Normaleneinheitsvektor 216
  - Tangenteneinheitsvektor 215
- Einspannung 36, 84  
 elastisches Knicken 210  
 Elastizitätsgesetz 125
- für die Dehnung 126
  - für die Gleitung 129
- Elastizitätsmodul 126, 127  
 Energie 256
- kinetische Energie 257, 260, 268
  - potenzielle Energie 258, 260
  - Rotationsenergie 269
  - Translationsenergie 269
- Energieerhaltungssatz 260  
 Energiesatz 260

- Verallgemeinerung für Kräfte und Momente ohne Potenzial 271
- Wann vorteilhaft? 266
- Erregerkraft 284, 301
- Erregerkreisfrequenz 303
- Ersatzfederzahlen *Siehe* Feder
- Erstarrungsprinzip 12
- erzwungene Schwingungen 282, 284, 301
- Kraftherregung 301
- Stützererregung 304
- Unwuchterregung 304
- EULER-Fälle 207, 209
- EYTELWEINSche Gleichung 97

**F**

- Fachwerk 50
  - Berechnungsmethoden 53
  - mit einfachem Aufbau 52
  - mit nicht einfachem Aufbau 53
  - statische Bestimmtheit 51
- Feder
  - Ersatzfedersteifigkeit für Kragbalken 263
  - Ersatzfederzahl, -steifigkeit 292
  - Federgesetz 292
  - näherungsweise Berücksichtigung der Masse 291
  - Parallelschaltung von Federn 292
  - Reihenschaltung von Federn 293
- Federmasse
  - näherungsweise Berücksichtigung bei Schwingungsuntersuchungen 291
- Festigkeitshypothesen 197
- Festigkeitslehre
  - Ziel der ... 115
- Festigkeitsnachweis 116
- Festlager 35, 84
- Flächenmoment 2. Grades 103
  - axiales 104, 107
  - für einfache Flächen 107
  - für zusammengesetzte Flächen 112
  - polares 104, 177
  - zentrifugales 104, 107
- Flächenpressung 120, 141

- ebene Berührungsflächen 141
- gekrümmte Berührungsflächen 143
- Flächenschwerpunkt 100
- Flächenträgheitsmoment *Siehe* Flächenmoment 2. Grades
- Flächentragwerk
  - Scheibe, Platte, Schale 33
- Formänderung 123
- Formzahl 133
- freie Schwingungen 282, 284, 285, 294
  - freie gedämpfte 282, 283, 294
  - freie ungedämpfte 282, 283, 285
- Freier Fall 222
- Freiheitsgrad 31, 226, 233, 234, 241, 250, 251, 253, 274, 275, 276, 278, 280, 283, 305, 306
- Frequenz 221, 282
- Frequenzverhältnis 302

**G**

- gedämpfte Schwingung 282, 294
- generalisierte Koordinaten 275
- generalisierte Kraft 275
- Gerade Biegung 146
- Gerberträger 48
- Geschwindigkeit 214
  - in Bahnkoordinaten 216
  - in kartesischen Koordinaten 215
  - in Polarkoordinaten 219
  - Kreisbewegung 220
- Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz 222, 224, 225, 287
- Gestaltänderungshypothese 198
- gleichartige Spannungen 189
- Gleichgewicht 15
  - allgemeines ebenes Kraftsystem 29
  - allgemeines räumliches Kraftsystem 82
  - labiles 207
  - stabiles 206
  - zentrales ebenes Kraftsystem 21
  - zentrales räumliches Kraftsystem 77
- Gleichgewichtsbedingungen *Siehe* Gleichgewicht
- Gleitkraft, Gleitreibungskraft 89, 94

- Gleitmodul 130  
 Gleitreibung 89, 94  
 – Seilreibung 95, 98  
 Gleitreibungskoeffizient 94  
 Gleitung 123, 129  
 Grenzsclankheitsgrad 210
- H**  
 Haftkraft 89  
 – obere Grenze 90  
 Haftung 89  
 – Seilhaftung 95, 96  
 Haftungskegel 91  
 Haftungskoeffizient 90  
 harmonische Schwingung 282  
 Hauptachsen 108  
 Hauptflächenmomente 108  
 Hauptnormalspannung 196  
 Hauptschubspannungen 196  
 Hauptschubspannungsachsen 196  
 Hauptspannungen  
 – Hauptnormalspannungen 196  
 – Hauptschubspannungen 196  
 Hauptspannungsachsen 196  
 Hauptspannungshypothese 197  
 Hauptzentralachsen 111  
 Hauptzentralmomente 111  
 homogen 117  
 homogene Lösung 286, 288, 296, 301, 307  
 HOOKEsches Gesetz 126  
 – verallgemeinertes (räumlicher Spannungszustand) 130
- I**  
 Inertialsystem 236  
 inkompressibel 128  
 Integrationskonstante 134, 179  
 isotrop 117
- K**  
 kartesische Koordinaten 215  
 Kennfrequenz *Siehe* Eigenfrequenz  
 Kennkreisfrequenz *Siehe* Eigenkreisfrequenz  
 Kerbspannung 132  
 Kinematik 213  
 – des Punktes 214  
 – Grundaufgaben der Kinematik 221  
 – von Systemen aus Punktmassen und starren Körpern 232  
 Kinetik 213, 236  
 kinetische Energie 257, 260  
 – für starren Körper 268  
 – Rotationsenergie 269  
 – Translationsenergie 269  
 Knicken 119, 204, 207  
 – elastisches Knicken 210  
 – im plastischen Bereich 210  
 Knicklänge 209  
 Knickspannung 209  
 Knoten  
 – Fachwerkknoten 50  
 Knotenschnittverfahren 53  
 konservative Systeme 260, 271  
 Koordinatensystem 214  
 – Bahnkoordinaten 216  
 – kartesische Koordinaten 215  
 – Polarkoordinaten 218  
 Koordinatenvektor 306  
 Körper  
 – deformierbarer 115  
 – starrer 11, 115  
 Kraft 12  
 – Darstellung 13, 15  
 – eingeprägte Kraft 15  
 – Einzelkraft 13  
 – flächenhaft verteilte 13  
 – kritische (Stabilität) 119, 204, 207, 209  
 – räumlich verteilte 13  
 – Reaktionskraft 15  
 Krafteck 17  
 Kräftepaar 25  
 Kräfteplan 17, 25  
 Krafterregung 301  
 Kraftsystem 16  
 – allgemeines ebenes 24  
 – allgemeines räumliches 79  
 – zentrales ebenes 16

- zentrales räumliches 76
- Kreisbahn 220, 225
- Kreisfrequenz 282
- Kriechvorgang 300
- kritische Kraft 119, 204, 206, 207, 209
- Krümmung 146, 152

**L**

- labiles Gleichgewicht 207
- Lageplan 16, 19, 25
- Lagerungen 21, 34, 83
- LAGRANGESche Bewegungsgleichungen 213, 274
  - Vorgehensweise 275
- LAGRANGESche Funktion 275
- Längskraft 60, 86, 119, 131
- Lastvektor 306
- LEHRsches Dämpfungsmaß 295
  - experimentelle Bestimmung 298
- Leistung 256, 266
- linearer Schwinger 282, 284
- Linien Schwerpunkt 102
- Linientragwerk
  - Balken 33
  - Seil 33
  - Stab 33
- Lochleibungsdruck 143
- logarithmisches Dekrement 299
- Loslager 34, 84

**M**

- Massenmatrix 279, 306
- Massenmittelpunkt 99
- Massenmoment 2. Grades 244, 245
- Massenschwerpunkt 99
- Massenträgheitskräfte 237, 238
- Massenträgheitsmoment 244
- Materialeigenschaften
  - homogen 117
  - inkompressibel 128
  - isotrop 117
- Materialgesetz 116, 125 *Siehe auch* Elastizitätsgesetz
- Materialkenngröße 116, 127, 128, 129, 130

**Materialverhalten**

- elastisch 117, 127
- linear 117
- Matrizengleichung 279, 306
- Mechanik 11
  - Was ist .... 11
- mehrachsiges Spannungszustände 191
- Moment 26, 79, 80
  - statisches Moment 100, 101, 103, 105, 170, 171, 243, 247
  - statisches Moment einer Kraft 27
- Momentanpol 227

**N**

- Nacheilwinkel 302
- Nennspannung 126, 133
- neutrale Faser, - Schicht 145
- NEWTONsches Grundgesetz 213, 236, 256
- nichtkonservative Kraft 275
- nichtlinearer Schwinger 282, 284
- Normalbeschleunigung 218, 220
- Normaleneinheitsvektor 216
- Normalenhypothese 146
- Normalspannung 121, 126, 189
  - bei gerader Biegung 146
  - bei schiefer Biegung 164
  - Flächenpressung 141
  - Hauptnormalspannungen 196
  - Knickspannung 209
  - Zug/Druck 131
- Normalspannungshypothese 197
- Nullphasenwinkel 282, 288
- Nullpotenzial 259, 274
- Nullstäbe 56

**O**

- Ortsvektor 214
  - differenzielle Änderung 216
  - in Bahnkoordinaten 216
  - in kartesischen Koordinaten 215
  - in Polarkoordinaten 218

**P**

- Parallelogrammsatz 17, 24



Parallelschaltung von Federn *Siehe*

Feder

partikuläre Lösung 301, 307

Pendelstütze 34, 83

periodische Schwingung 281

Phasenverschiebung 302, 303

Phasenwinkel 282

Platte 33

POISSONSche Zahl 128

Polarkoordinaten 218

Potenzial 258

– der Schwerkraft 259

– Nullpotenzial 259

Potenzialkraft 258, 260

potenzielle Energie 258, 260

Projektionsfläche 143

## Q

Querdehnung, Querkontraktion 127

Querkontraktionszahl 128

Querkraft 60, 86, 120, 167

Querkraftschub 120, 167

– Abschätzung der Verformungen 171

## R

Randbedingung 134

– dynamische 154

– geometrische 154

räumlicher Spannungszustand 122

Reaktionskräfte 15

Reibung *Siehe* Gleitreibung

Reihenschaltung von Federn *Siehe*

Feder

relativer Verdrehwinkel 179

Resonanz 303, 312

Resultierende 16

– analytische Lösung 18, 28, 77

– grafische Lösung 16

– zweier paralleler Kräfte 24

RITTERSches Schnittverfahren 57

Rollbedingung 229

Rollendes Rad 229, 234, 251

– kinetische Energie 270

– Rollbedingung 229

– Zwangsbedingungen 234

Rotation 226

Rotationsenergie 269

## S

SAINT-VENANTSche Torsion 183

Satz von STEINER *Siehe* STEINERSche

Satz

Schale 33

Scheibe 31, 33, 34

Scheibenverbindungen

– statische Bestimmtheit 42

Scherbeanspruchung 120, 186

– Scherschubspannung 187

– typische Scherbeanspruchungen 186

Scherfläche 186

Scherkräfte 187

Schiefe Biegung 164

Schlankheitsgrad 210

Schnittgrößen

– Berechnung 61

– differenzielle Beziehungen 65

– grafische Darstellung 61

– in ebenen Systemen 58

– in räumlichen Systemen 86

Schnittprinzip 14

Schnittufer 59, 65, 86, 122

Schubspannung 121, 130, 167, 186, 189

– Gleichheit zugeordneter ... 168, 192

– Hauptschubspannungen 196

– infolge Querkraftschub 168

– Scherschubspannungen 187

– Torsionschubspannung 176

– zugeordnete 168, 192

Schubspannungshypothese 197

Schwerpunkt 99

– Flächenschwerpunkt 100

– Linienschwerpunkt 102

– Massenschwerpunkt 99

– Volumenschwerpunkt 100

– zusammengesetzter Gebilde 102

Schwinger 283

– linearer 282, 284

– mit einem Freiheitsgrad 283, 285, 294

– mit  $n$  Freiheitsgraden 283, 305

- mit unendlich vielen Freiheitsgraden 284
- nichtlinearer 282, 284
- Schwingungen 281
  - angefachte 283
  - Charakterisierungen 282
  - erzwungene 282, 284, 301
  - freie 282, 284, 285, 294
  - freie gedämpfte 282, 283, 294
  - freie ungedämpfte 282, 283, 285
  - harmonische 282
  - periodische 281
- Schwingungsdauer 282, 287
- Schwingungstilgung 312
- Seil 21, 33
- Seilhaftung 95, 96
- Seilreibung 95, 98
- Spannung 115, 121, 126, 189
  - gleichartige Spannungen 189
  - Hauptspannungen 196
  - Knickspannung 209
  - Nennspannung 126, 133
  - Normalspannung 121, 131, 145, 164
  - Schubspannung 121, 130, 167, 168, 176
  - Spannungskomponenten 121
  - Spannungsnachweis 116
  - Tangentialspannung 121
  - ungleichartige Spannungen 189
  - Vergleichsspannung 189
  - zulässige 191
- Spannungs-Dehnungs-Diagramm 126
- Spannungshypothesen 191, 197
  - Gestaltänderungshypothese 198
  - Hauptspannungshypothese 197
  - Schubspannungshypothese 197
- Spannungsnulllinie 164
- Spannungstensor 122
- Spannungszustand 121
  - ebener 191, 195
  - einachsiger 126, 132
  - mehrachsiger 191
  - räumlicher 122
  - zweiachsiger 191, 195
- Stab 21, 33
  - stabiles Gleichgewicht 206
  - Stabilität 119, 203
    - einfaches Stabilitätsproblem 205
    - Stabknickung 207
  - Stabknickung 204, 207
  - Stabsysteme 50, 131
  - starre Scheibe 31
    - Lagerung starrer Scheiben 34
  - starrer Körper 11, 115
  - Statik 11
  - stationärer Zustand (- Schwingung) 303, 312
  - statische Auslenkung 289, 303
  - statische Bestimmtheit 31, 51
  - statische Ruhelage 289, 290, 291
  - statisches Moment 100, 101, 103, 105, 170, 171, 243, 247
    - einer Kraft 27
  - Steifigkeitsmatrix 279, 306
  - Steifigkeitsnachweis 116
  - STEINERScher Satz
    - für Flächenmomente 2. Grades 105
    - für Massenmomente 2. Grades 246, 247
  - Stoffgesetz *Siehe* Materialgesetz
  - Streckenlast 37
    - Resultierende 38
- T**
- Tangenteneinheitsvektor 215
  - differenzielle Änderung 217
- Tangentialbeschleunigung 218, 220
- Tangentialspannung 121
- Technische Mechanik *Siehe* Mechanik
- Temperaturdehnung 128
- TETMAJER-Formel 210
- Theorie 1. Ordnung 117
- Theorie 2. Ordnung 206, 207
- Torsion 119, 175
  - allgemeine Querschnitte 183, 184
  - dünnwandige einzellige und mehrzellige Querschnitte 184
  - dünnwandige offene Querschnitte 184
  - SAINT-VENANTSche 183

- von Kreis- und  
  Kreisringquerschnitten 175
- Wölbkrafttorsion 183
- Torsionsflächenmoment 184
- Torsionsmoment 86, 119, 175
- Torsionssteifigkeit 178, 184
- Torsionswiderstandsmoment 184
- Trägheitskräfte 237
- Trägheitsmoment *Siehe*  
  Massenmoment 2. Grades
- Trägheitsradius 210
- Tragwerk
  - Flächentragwerk 33
  - Linientragwerk 33
- Translationen 226
- Translationsenergie 269

**Ü**

überkritische Erregung 304

**U**

ungedämpfte Schwingung 282, 285

ungleichartige Spannungen 189

unterkritische Erregung 304

**V**

Verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz  
  130

Verdrehwinkel 176, 178
 

- relativer 179

Verformung 115
 

- gerade Biegung 151
- Querkraftschub 171
- schiefe Biegung 165
- Torsion 178
- Verformungsnachweis 116
- Zug/Druck 133

Vergleichsspannung 189, 191, 197, 198

Vergrößerungsfunktion 303

Verlängerung eines Stabes 134

verlorene Kraft 237

Verschiebung 116, 123

Versetzungsmoment 27

Verwölbung 146, 175, 183

Verzerrung 116, 123

Verzerrungstensor 125

Verzerrungszustand *Siehe*  
  Deformationszustand

Verzweigungspunkt 206

vollständiges Differenzial 258

Volumendehnung 131

Volumenschwerpunkt 100

**W**

Wärmeausdehnungskoeffizient 129

Wechselwirkungsprinzip 14

Weg-Zeit-Gesetz 222, 224, 225, 287

Widerstandsmoment 149

Winkelbeschleunigung 220

Winkelgeschwindigkeit 220, 282

Wölbkrafttorsion 183

**Y**

YOUNG'scher Modul 126

**Z**

Zentrales Kraftsystem
 

- ebenes 16
- räumliches 76

Zentrifugalmoment 104

Zug 119, 131

zugeordnete Schubspannungen 168,  
  192

Zugversuch 125, 193

zulässige Spannung 191

Zusammengesetzte Beanspruchung 189
 

- Überlagerung gleichartiger  
  Spannungen 190
- Überlagerung ungleichartiger  
  Spannungen 191

Zwangsbedingungen 233
 

- am rollenden Rad 234
- für System starrer Körper 235

zweiachsiger Spannungszustand 191,  
  195