

den, indem man die Gleichgewichtsgleichungen aus [Gleichung \(1.111\)](#) als lineares Gleichungssystem darstellt:

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \dots, 3n\}, \quad (1.112)$$

mit

$$x = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ M_A \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Dx} \\ F_{Dy} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{Ex} \\ M_E \\ F_{Fx} \\ F_{Fy} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

Das Kriterium für die Lösbarkeit ist nun, ob die Determinante der Matrix ungleich Null ist. In diesem Fall verschwindet $\det(A) = 0$, so dass das System nicht lösbar ist. ■

■ 1.6 Der biegesteife Träger



Propädeutikum: Man studiere aus [\[MF2019\]](#) den Abschnitt 1.6.

1.6.1 Begriffsbildung

Die Pendelstützen eines Fachwerks sind idealerweise gelenkig gelagert, so dass auf sie nur Normalkräfte (Zug oder Druck), aber keine Biegemomente übertragen werden können. Wir haben aber schon in [Abb. 1.26](#) gesehen, dass in der Realität die Kopplung von Stütze zu Stütze mehr oder weniger steif ist, was bedeutet, dass doch Querkräfte und Momente übertragen werden. In der Tat ist das der allgemeine Fall. Daher untersuchen wir im Folgenden durch Normal- und Querkräfte sowie durch Momente belastete **Balken**. Balken ist ein bauteilbezogener Ausdruck: Ein geometrisch definierter Querschnitt (quadratisch, rund, rechteckig, L-Profil, Doppel-T-Profil *etc.*) und eine im Verhältnis dazu i. A. große Länge bestimmen seine Form. In der Tat spricht man von einem (geraden) **schlanken** Balken, wenn die charakteristische Querschnittszur Achslänge in etwa 1:10 oder größer ausmacht. Solche Balken werden wir untersuchen, da dann die zu verwendende Theorie hinreichend simpel ist. Funktionell bezeichnet man waagrechte, nur teilweise aufliegende Balken auch als **Träger**. Außerdem werden wir uns auf Balkenkonstruktionen in der Ebene beschränken. Das lässt bereits hinreichend viel Spielraum für die Belastung zu und erlaubt dennoch eine mathematisch nicht zu umfangreiche Beschreibung.

Unser vordringliches Ziel ist es, Tragwerke sicher zu konstruieren. Somit ist sicherzustellen, dass die in der Konstruktion verwendeten Balken weder zerreißen noch knicken oder sich verbiegen. Um das zu garantieren, muss man über der Balkenachse für jeden Balkenquerschnitt nachweisen, dass die dort herrschenden **Spannungen** gewisse kritische Werte nicht übersteigen. Dass Spannungen quasi Kräfte pro Flächeneinheit, also Kraftintensitäten sind, welche Arten es gibt und wie sie genau berechnet werden, wird später erläutert. Gegenwärtig genügt es zu wissen, dass man dazu die im Balkenquerschnitt wirkenden Kraftverhältnisse genau kennen muss. Diese sind durch die drei **Schnittgrößen**, nämlich **Normalkraft**-, **Querkraft**- und **Momentenverteilung**, gegeben. Ihrer Begriffsbildung und den zugehörigen Berechnungsverfahren wenden wir uns nun zu. Wir studieren zunächst gerade, dann abgewinkelte und schließlich beliebig gekrümmte Balken.

1.6.2 Schnittgrößen

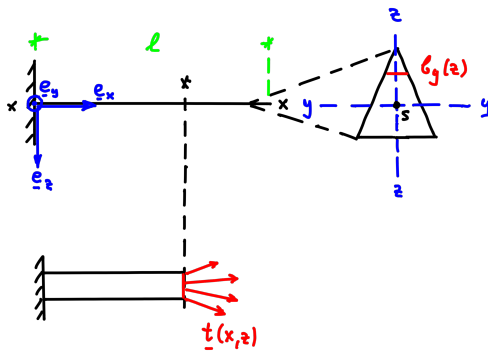


Bild 1.38 Koordinaten am horizontalen geraden Balken.

Unser Balken sei gerade. Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, dass er horizontal angeordnet ist. Wir kennzeichnen seine Flächenschwerpunkte durch ein **globales Koordinatensystem** mit kartesischen Einheitsvektoren, siehe Abb. 1.38. Hier hätte man noch diverse Möglichkeiten, Richtungen zu wählen. Wir schließen uns einer im Bauwesen und Maschinenbau oft gebräuchlichen Form an: Die Schwerachse des Trägers bezeichnen wir mit x - x . Der zugehörige Einheitsvektor e_x weist von links nach rechts in ihrer Richtung. Den Flächenschwerpunkt an der Stelle x (zu sehen für einen Dreiecksquerschnitt) identifizieren wir mit dem Fadenkreuz y - y und z - z . Dies sind gleichzeitig auch die beiden Achsen, um die weiter unten Biegungen stattfinden können. Ihre Richtungen wählen wir so, dass e_z quasi in Richtung der Schwerkraft zeigt. Um dann ein mathematisch positives kartesisches Dreibein zu generieren, muss e_y aus der Tafelenebene hinausweisen. Zusammenfassend darf man sagen, dass dann die Menge der Volumenmittelpunkte durch $x^v = (x, 0, 0)_i e_i$, $x \in [0, \ell]$ gegeben ist, wobei ℓ die Balkenlänge bezeichnet. Wie in Abb. 1.38 angedeutet, erfolgt diese Zählung sozusagen von links nach rechts.

Nun zerteilen wir in Gedanken den Balken durch einen senkrechten Schnitt an der Stelle x in zwei Teile. Um die Analyse in einem nicht völlig allgemeingültigen, aber dennoch anspruchsvollen Rahmen zu halten, nehmen wir zunächst an, dass der Balken unter externen Lasten steht, die allesamt in der x - z -Ebene wirken, siehe Abb. 1.39. Punktkräfte F_i , sowie Normal- und Querkraftverteilungen $n(x)$ bzw. $q_n(x)$ wurden bereits oben diskutiert. Insbesondere wurde in den Abschnitten 1.1 und 1.2 gezeigt, dass sich Normal- und Querkraftverteilungen über Gewichtverteilungen erzeugen lassen. Die Momentenverteilung $m(x)$ (in Einheiten von Nm/m) ist neu. Sie kann gedanklich als kontinuierliche Verteilung von Momentenpaaren begriffen werden und wird in der deutschen Literatur auch **Momentenschüttung** genannt. Eine solche

Unser Balken sei gerade. Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, dass er horizontal angeordnet ist. Wir kennzeichnen seine Flächenschwerpunkte durch ein **globales Koordinatensystem** mit kartesischen Einheitsvektoren, siehe Abb. 1.38. Hier hätte man noch diverse Möglichkeiten, Richtungen zu wählen. Wir schließen uns einer im Bauwesen und Maschinenbau oft gebräuchlichen Form an: Die Schwerachse des Trägers bezeichnen wir mit x - x . Der zugehörige Einheitsvektor e_x weist von links nach rechts in ihrer Richtung. Den Flächenschwerpunkt an der Stelle x (zu sehen für einen Dreiecksquerschnitt) identifizieren wir mit dem Fadenkreuz y - y und z - z . Dies sind gleichzeitig

Größe in der Praxis zu erzeugen, ist allerdings nicht einfach. Eine Möglichkeit der Realisierung besteht in einer auf Molekülebene erfolgenden, rotativen Ausrichtung einer dünn aufgetragenen elektrischen Dipolschicht mit Hilfe externer elektrischer Felder.

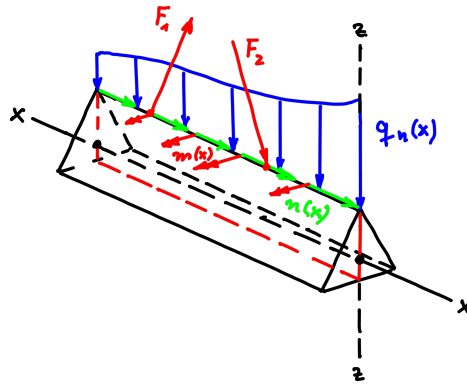


Bild 1.39 Kräfteinleitung in der x - z -Ebene.

Die Wirkung dieser externen Lasten wird durch Reaktionskräfte in der Schnittebene kompensiert, und zwar dergestalt, dass insgesamt, also im Verbund mit auf dem Teilbalken eingepprägten Lasten sowie freigeschnittenen Lagerreaktionen, Kräfte- und Momentengleichgewicht herrscht. Über der freigeschnittenen linken Querschnittsfläche (dem sogenannten **linken Schnittufer** SU) resultiert so eine i. A. komplexe Kraftverteilung, wie in der Abb. 1.38 unten angedeutet, die aufgrund der angenommenen Reduktion der eingepprägten Kräfte auf die x - z -Ebene, aber nicht von der y -Richtung abhängt. Wir charakterisieren sie durch das Symbol $\mathbf{t}(x, z)$ (in N/m^2), wobei in Komponenten gilt:

$$\mathbf{t}(x, z) = t_x(x, z)\mathbf{e}_x + t_z(x, z)\mathbf{e}_z. \quad (1.114)$$

In der Tat haben wir in Gleichung (1.32) gesehen, dass man eine solche Verteilung durch einen resultierenden Kraft- und einen resultierenden Momentenvektor ersetzen kann. Für diesen Kraftvektor gilt:

$$\mathbf{R}(x) = \int_A \mathbf{t}(x, z) b_y(z) dz, \quad (1.115)$$

wobei $b_y(z)$ die Breite der Schnittfläche A in der Höhe z ist. Folglich können wir ihn in einen Anteil normal zum Schnittufer und einen Anteil im Schnittufer in z -Richtung aufteilen. Ersteren nennen wir die Normalkraft $N(x)$, letzteren die Querkraft $Q(x)$, und es gilt:

$$N(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_x, \quad Q(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.116)$$

Nun zum resultierenden Moment. Wir legen den Fußpunkt O (zum Begriff vgl. Abb. 1.5) in das Flächenzentrum und notieren für den Kraftaufpunkt den Vektor $\mathbf{x} = (0, y, z)_i \mathbf{e}_i$. Dann gilt:

$$\mathbf{M}^R(x) = \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}(x, z) b_y(z) dz \equiv \int_A z t_x(x, z) b_y(z) dz \mathbf{e}_y. \quad (1.117)$$

Wie zu erwarten, steht der Momentenvektor senkrecht zur Krafteinleitungsebene (x - z) und hat nur eine in \mathbf{e}_y weisende Komponente (wie der in Abb. 1.39 gezeigte Momentenschüttungsvektor $\mathbf{m} = m(x)\mathbf{e}_y$). Diverse Bemerkungen sind angebracht:

- Zur Unterscheidung von linkem und rechten Schnittufer ist eine lokale Charakterisierung sinnvoll. In diesem Sinne führen wir von der Balkenschnittfläche jeweils hinausweisende Normalenvektoren \mathbf{n} ein. Am linken Schnittufer gilt dann offenbar $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ und für das rechte Schnittufer $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$. Vereinbarungsgemäß gilt $N(x) > 0$, falls die Normalkraft in Richtung der jeweiligen Normale zeigt.
- Am **linken Schnittufer** zeigt eine positive Querkraft vereinbarungsgemäß in Richtung \mathbf{e}_z , sozusagen in Richtung der Schwerkraft. Ein positives Moment dreht dort nach links, wie in der Abb. 1.40 zu sehen ist, oder anders ausgedrückt, der Momentenvektor zeigt in \mathbf{e}_y -Richtung. Dieses Moment sorgt für Biegung um die y - y -Achse sozusagen vom Untergurt zum Obergurt. In Bezug auf ein globales Koordinatensystem müsste man ganz akkurat schreiben $\mathbf{Q} = Q_z\mathbf{e}_z = Q(x)\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{M}^R = M_y\mathbf{e}_y = M(x)\mathbf{e}_y$. Nur macht man das i. A. nur dann, wenn Verwechslungen auftreten könnten (siehe unten). Am **rechten Schnittufer** zeigen die Schnittgrößen gemäß dem Prinzip Kraft und Gegenkraft in entgegengesetzte Richtung, also $\mathbf{Q} = Q_z\mathbf{e}_z = -Q(x)\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{M} = M_y\mathbf{e}_y = -M(x)\mathbf{e}_z$.

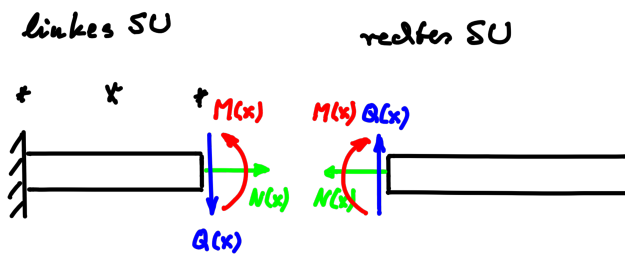


Bild 1.40 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer.

- Diverse externe, in Abb. 1.39 dargestellte, aber in Abb. 1.38 und Abb. 1.40 nicht eingezeichnete Kräfte, wirkten bislang in der x - z -Ebene, und diverse externe Momentenvektoren standen senkrecht dazu. Das führte dazu, dass die **drei Schnittgrößen** $N(x), Q(x), M(x)$ eindimensional von der Achsenposition x abhingen. Es ist aber auch denkbar, dass der Balken in der x - y -Ebene belastet wird. Jetzt schreiben wir:

$$\mathbf{R}(x) = \int_A \mathbf{t}(x, z) b_z(y) dz, \quad \mathbf{t}(x, z) = (t_x(x, z), t_y(x, z), 0)_i \mathbf{e}_i, \quad (1.118)$$

wobei $b_z(y)$ die Höhe der Schnittfläche A im Abstand y ist. Das führt dann wieder zu einer Normalkraft $N(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_x$, die am linken Schnittufer falls positiv in Richtung \mathbf{e}_x weist, einer Querkraft $Q_z(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_y$ und diesmal zu einem Momentenvektor $\mathbf{M}^R = M_z(x)\mathbf{e}_z$. Dieser biegt um die z - z -Achse sozusagen von der Balkenrückseite zur Vorderfront. Man sieht, dass man jetzt mit Indizes bei der eindeutigen Charakterisierung nachhelfen muss. Der kombinierte Fall für gleichzeitige Belastung in der x - z - und x - y -Ebene ist für das linke und rechte Schnittufer in der Abb. 1.41 für einen Dreiecksquerschnitt dargestellt.

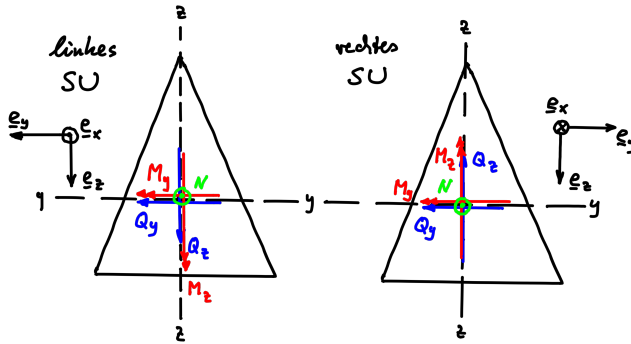


Bild 1.41 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer aus kombinierter Belastung.

- Wir werden im Kapitel über Elementare Festigkeitslehre lernen, dass es sich bei der Größe t um den sogenannten **Spannungsvektor** handelt.

1.6.3 Schnittgrößendifferentialgleichungen (gerader Balken)

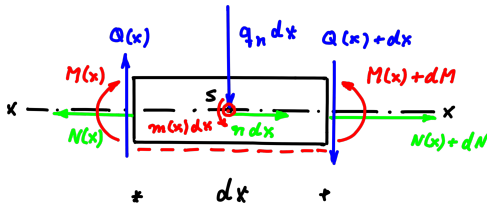


Bild 1.42 Freischnitt eines infinitesimalen geraden Balkenstücks.

Eine Bestimmungsmethode der drei Schnittgrößen beruht auf zugehörigen Differentialgleichungen, die wir jetzt ableiten werden. Zu diesem Zweck wird ein infinitesimal kleines Stück der Länge dx aus dem Balken freigeschnitten, siehe Abb. 1.42. Man beachte, dass wir die Normal- und Querkraftverteilungen $n(x)$ und $q_n(x)$ sowie die Momentenschüttung $m(x)$ (Momentenpaarvektoren kann man beliebig im Raum verschieben) in der jeweils positiven Richtung

eingetragen und im Schwerpunkt zusammengefasst haben. Wir werten die Gleichgewichtsbedingungen der Ebene vorzeichengerecht aus:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: -N(x) + N(x) + dN + n(x) dx = 0, \\ \sum F_z = 0 &: -Q(x) + Q(x) + dQ + q_n(x) dx = 0, \\ \sum M^{(S)} = 0 &: -M(x) - Q(x) \frac{dx}{2} + m(x) dx + M(x) + dM - (Q(x) + dQ) \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \tag{1.119}$$

In der letzten Gleichung ist zu beachten, dass Produkte zweier Differentialausdrücke im Grenzfalle $dx \rightarrow 0$ verschwinden. Es folgt:

$$\frac{dN}{dx} = -n(x), \quad \frac{dQ}{dx} = -q_n(x), \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) - m(x). \tag{1.120}$$

Das sind bereits die Schnittliniendifferentialgleichungen, die man **bereichsweise** im Balken **unbestimmt integriert** aufschreibt:

$$\begin{aligned} N(x) &= - \int n(x) dx + C_0, \\ Q(x) &= - \int q_n(x) dx + C_1, \\ M(x) &= \int (Q(x) + m(x)) dx + C_2 \equiv - \int \int q_n(x) dx dx + \int m(x) dx + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Wieder sind einige Bemerkungen nötig:

- Bereiche bzw. Abschnitte definieren sich typischerweise durch Stellen am Balken, an denen Punktkräfte oder Punktmomente eingeleitet werden. Andererseits können im Prinzip auch die Normal- und Querkraftverteilungen $n(x)$ und $q_n(x)$ Unstetigkeiten aufweisen. Auch dann ist eine Bereichsaufteilung möglich, aber nicht obligatorisch, da die zugehörigen Integrationen aufgespalten werden können.
- In jedem Bereich gibt es neue Integrationskonstanten C'_0, C'_1, C'_2 , die man durch neue Symbole zu unterscheiden hat. Man bestimmt sie aus einer genügend großen Anzahl von Rand- und Übergangsbedingungen: Beispiele 1.11, 1.12.
- Um eine Übersicht zu gewinnen, wo die Belastungen besonders groß sind, zeichnet man die drei Schnittgrößen vorzeichengerecht über dem Balken auf. Man erhält die **Normalkraft-, Querkraft- und Momentenflächen**.
- An den Stellen des Balkens, wo eine Punktkraft horizontal bzw. vertikal eingeleitet wird, weisen die Normalkraft- bzw. die Querkraftverteilung Unstetigkeiten auf, sie springen! Ebenso ist die Momentenfläche dort unstetig, wo ein reines Moment angebracht ist. Die Anwesenheit einer Punktkraft führt hier nicht zum Sprung. Man sagt, dass Integration (siehe Gleichung (1.121)₃) glättet.
- Für den Fall, dass keine Normal- und Querlastverteilungen $n(x)$ und $q_n(x)$ anwesend sind, sind $N(x)$ und $Q(x)$ abschnittsweise konstant (Konstanten C_0 und C_1), und $M(x)$ ist durch Geradenstücke $C_1 x + C_2$ gegeben.
- Zur (Vorzeichen-)Kontrolle der Flächen $Q(x)$ und $M(x)$ kann die Gleichung (1.121)₃ verwendet werden: Die lokale Steigung an der Momentenfläche ist gleich der dort herrschenden Querkraft. Die Steigung entspricht dem Neigungswinkel der Tangente an der Kurve. Sie kann mit fortschreitendem x ansteigen bzw. fallen. Entsprechend ist die Querkraft dann positiv oder negativ.
- Man muss nicht immer über die Differentialgleichungen gehen, um an die Schnittgrößen an einer Stelle x zu gelangen. Alternativ kann man an dieser Stelle sowie an den Balkenlagerungen freischneiden und erhält zwei Teilbalken, einen mit einem linken und einen mit einem rechten Schnittufer. An jedem kann man Kräfte- und Momentengleichgewicht studieren, um die drei Schnittgrößen vorzeichenrichtig zu bestimmen. Ob man das linke oder das rechte Balkenstück nimmt, ist gleichgültig, das Endergebnis muss dasselbe sein. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass man die Lagerreaktionen kennt, also vorab bestimmt hat, was nur bei einem statisch bestimmten System einfach möglich ist. Die Schnittlastendifferentialgleichungsmethode wird bei statisch unbestimmten Systemen oft mit der Bestimmung der Biegelinie kombiniert, vgl. Abschnitt 2.6.4 in [MF2019] und Beispiel 2.9.
- Eine weitere Methode zur Bestimmung der Schnittlasten ist das sogenannte **Aufziehverfahren**, siehe Beispiel 1.14. Dieses führt ausschließlich bei mit Punktkräften und -momenten

belasteten Balken zum Erfolg. Es ist besonders effizient, wenn der Balken über ein freies Ende verfügt, was es uns erspart, vorab die Auflagerreaktionen zu ermitteln: Beispiel 1.14.

Zum Schluss noch eine Bemerkung, wenn wir eine Belastung in der in Abb. 1.41 gezeigten Art voraussetzen. In diesem Fall müssen wir das System von Differentialgleichungen von einer Belastung in der x - z -Ebene mit Biegung um die y -Achse auf eine zusätzliche Belastung in der x - y -Ebene mit Biegung um die z -Achse erweitern, wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -n(x), \\ \frac{dQ_y}{dx} &= -q_{n,y}(x), \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_{n,z}(x), \\ \frac{dM_y}{dx} &= Q_z(x) - m_y(x), \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y(x) - m_z(x). \end{aligned} \quad (1.122)$$

Beispiel 1.11 Differentialgleichungsverfahren mit Randbedingungen

Betrachtet wird der Balken in Abb. 1.43, der nicht nur unter einer linearen Querkraftverteilung $q(x)$ steht, sondern auch noch mit einer konstanten Normallastverteilung $n(x) = n_0$ belastet wird. Eine Momentenschüttung ist nicht vorhanden, so dass $m(x) \equiv 0$.

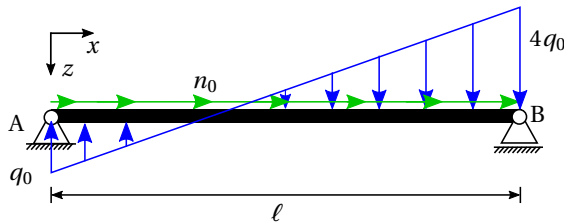


Bild 1.43 Kontinuierlich belasteter Balken.

Zur Auswertung der generischen Lösungen in Gleichung (1.121) werden zum einen die Funktionen $n(x)$ und $q(x)$ für die Integrationen benötigt, also:

$$n(x) = n_0, \quad q(x) = q_0 \left(5 \frac{x}{\ell} - 1 \right). \quad (1.123)$$

Zum anderen müssen die Randbedingungen für die Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ ermittelt werden, die für die Bestimmung der drei Unbekannten C_0 , C_1 und C_2 verwendet werden. In dem betrachteten Beispiel können aufgrund der einfachen Lagerung alle Randbedingungen direkt abgelesen werden. Das Festlager auf der linken Seite kann kein Moment aufnehmen. Neben der Momentenfreiheit des Loslagers auf der rechten Seite kann dieses auch keine Normalkraft aufnehmen. Insgesamt lauten die drei Randbedingungen:

$$M(x=0) = 0, \quad N(x=\ell) = 0, \quad M(x=\ell) = 0. \quad (1.124)$$

Die Lösungen aus Gleichung (1.121) zusammen mit den Funktionen aus Gleichung (1.123) lauten:

$$\begin{aligned} N(x) &= -n_0 x + C_0, \quad Q(x) = -q_0 \ell \left(\frac{5}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} \right) + C_1, \\ M(x) &= -q_0 \ell^2 \left(\frac{5}{6} \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} \right) + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Die Auswertung der Randbedingungen führt auf das folgende Gleichungssystem:

$$C_2 = 0, \quad -n_0 \ell + C_0 = 0, \quad -\frac{1}{3} q_0 \ell^2 + C_1 \ell + C_2 = 0. \quad (1.126)$$

Damit können die Schnittlasten angegeben werden als:

$$\begin{aligned} N(x) &= n_0 \ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right), & Q(x) &= -q_0 \ell \left(\frac{5}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} - \frac{1}{3}\right), \\ M(x) &= -q_0 \ell^2 \left(\frac{5}{6} \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{1}{3} \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.127)$$

Beispiel 1.12 Differentialgleichungsverfahren mit Rand- und Übergangsbedingungen

Das in Abb. 1.44 dargestellte System besteht aus zwei Balken, die im Punkt B mit einem Gelenk verbunden sind. Daher werden auch zwei unterschiedliche Bereiche betrachtet, die jeweils mit einem eigenen Koordinatensystem ausgestattet werden. Es ist prinzipiell nicht notwendig, lokale Koordinatensysteme einzuführen, allerdings erleichtert dies das Aufstellen der Lastverteilungsfunktionen. In jedem Bereich werden die Lösungen aus Gleichung (1.121) neu ausgewertet, so dass sich insgesamt sechs Unbekannte ergeben. Die Randbedingungen im Punkt A sowie im Punkt C wurden bereits im vorherigen Beispiel untersucht – es sind insgesamt drei:

$$M_1(x_1 = 0) = 0, \quad N_2(x_2 = \ell) = 0, \quad M_2(x_2 = \ell) = 0. \quad (1.128)$$

Dementsprechend werden noch drei weitere Bedingungen, Übergangsbedingungen genannt, benötigt.

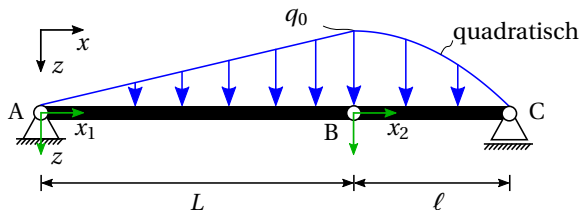


Bild 1.44 Belasteter Balken.

Zur Berechnung der Schnittgrößen beim Übergang der beiden Bereiche wird in Abb. 1.45 das Gelenk im Punkt B freigeschnitten.

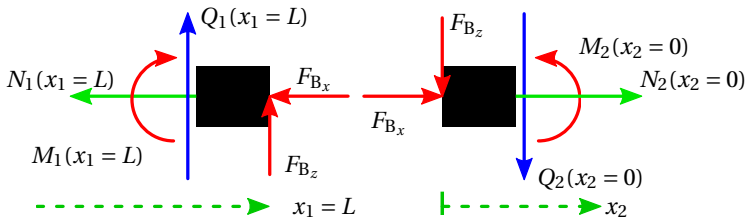


Bild 1.45 Schnittufer am Übergang.

Hier ergeben sich sechs Gleichgewichtsbedingungen, die sich nach Elimination der Lagerreaktionen F_{B_x} und F_{B_y} wie folgt reduzieren:

$$N_1(x_1 = L) = N_2(x_2 = 0), \quad Q_1(x_1 = L) = Q_2(x_2 = 0), \quad M_1(x_1 = L) = M_2(x_2 = 0) = 0. \quad (1.129)$$

In Worten: Die Funktionen N , Q und M sind stetig beim Übergang im Gelenk B. Dieses Ergebnis hätte man sich bereits zuvor überlegen können: Zunächst kann das Gelenk kein Moment aufnehmen, so dass dort das Schnittmoment verschwinden muss. Weiterhin kann das Gelenk Axial- und Querkräfte aufnehmen, was dazu führt, dass diese übertragen werden. Für kompliziertere Übergänge, beispielsweise wenn ein Punktmoment im Übergang angreift, lohnt es sich jedoch, den Übergang freizuschneiden.

Die bereichsweise Querlastverteilung lautet

$$q_1(x_1) = q_0 \frac{x_1}{L}, \quad q_2(x_2) = q_0 \left(1 - \frac{x_2^2}{\ell^2}\right). \quad (1.130)$$

Damit ergeben sich die bereichswisen Lösungen zu

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= C_0^1, & Q_1(x_1) &= -\frac{q_0 L}{2} \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + C_1^1, & M_1(x_1) &= -\frac{q_0 L^2}{6} \left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + C_1^1 x + C_2^1, \\ N_2(x_2) &= C_0^2, & Q_2(x_2) &= -q_0 \ell \left(\frac{x_2}{\ell} - \frac{1}{3} \frac{x_2^3}{\ell^3}\right) + C_1^2, \\ M_2(x_2) &= -\frac{q_0 \ell^2}{2} \left(\frac{x_2^2}{\ell^2} - \frac{1}{6} \frac{x_2^4}{\ell^4}\right) + C_1^2 x_2 + C_2^2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Die Auswertung der Randbedingungen in [Gleichung \(1.128\)](#) zusammen mit den Übergangsbedingungen aus [Gleichung \(1.129\)](#) liefert dann:

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= 0, & Q_1(x_1) &= -\frac{q_0 L}{2} \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \frac{q_0 L}{6}, & M_1(x_1) &= -\frac{q_0 L^2}{6} \left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + \frac{q_0 L}{6} x_1, \\ N_2(x_2) &= 0, & Q_2(x_2) &= -q_0 \ell \left(\frac{x_2}{\ell} - \frac{1}{3} \frac{x_2^3}{\ell^3}\right) + \frac{5q_0 \ell}{12}, \\ M_2(x_2) &= -\frac{q_0 \ell^2}{2} \left(\frac{x_2^2}{\ell^2} - \frac{1}{6} \frac{x_2^4}{\ell^4}\right) + \frac{5q_0 \ell}{12} x_2. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Beispiel 1.13 Das elementare Schnittprinzip

Das in [Abb. 1.46](#) dargestellte System besteht aus zwei Teilsystemen, die im Punkt B über ein Gelenk verbunden sind. Im Punkt C ist eine Schiebehülse angebracht.

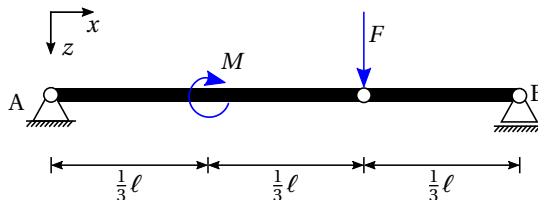


Bild 1.46 Balkensystem unter Punktbelastungen.

Im Allgemeinen werden die Lagerreaktionen für die Berechnung der Schnittlasten benötigt. Zwar kann in der vorliegenden Aufgabe die Berechnung der Lagerreaktionen durch geschickte Wahl der betrachteten Schnitthufer umgangen werden. Der Vollständigkeit halber werden wir dennoch damit beginnen. Wir fertigen hierfür die Freischnitte der beiden Teilsysteme an, wie in Abb. 1.47 gezeigt. Dabei gilt das eingezeichnete Koordinatensystem für beide Freischnitte.

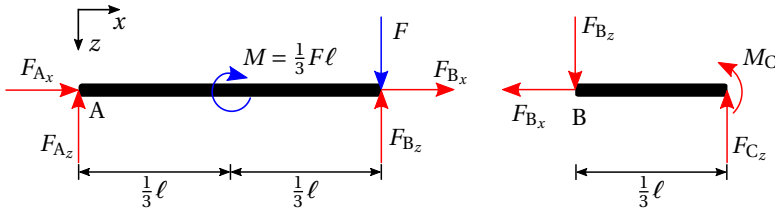


Bild 1.47 Freischnitt des Balkensystems.

Wichtig ist hier, dass die Kraft F , die im Gelenk angreift, nur in einen der Teilfreischnitte eingezeichnet wird. In welchem Teilsystem die Kraft angetragen wird, ist gleichgültig, denn es muss nur das Schnittprinzip erfüllt werden: Die Zusammenführung der beiden Teilsysteme muss wieder das Ausgangssystem ergeben.

Es bietet sich an, die Momentengleichgewichte um die Punkte A und B auszuwerten:

$$\sum M^{(A)} \stackrel{!}{=} 0 = -M + \frac{2}{3}\ell(F_{Bz} - F), \quad \sum M^{(B)} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{3}\ell F_{Cz} + M_C. \quad (1.133)$$

Weiterhin werden die Kräftegleichgewichte an beiden Systemen aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= F_{Ax} + F_{Bx}, & \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= -F_{Bx}, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= -F_{Az} - F_{Bz} + F, & \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= F_{Bz} - F_{Cz}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

Die Lösung der sechs Gleichgewichtsbedingungen liefert die Auflagerreaktionen:

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0, \quad F_{Az} = -\frac{F}{2}, \quad F_{Bz} = F_{Cz} = \frac{3}{2}F, \quad M_C = -\frac{F\ell}{2}. \quad (1.135)$$

Nun wird der Freischnitt erneut gezeichnet, wobei die berechneten Lagerreaktionen als äußere Kräfte angetragen und die Richtungen korrigiert werden. Weiterhin wird in Abb. 1.48 eine Bereichseinteilung vorgenommen. Im Folgenden wird jeder Bereich einzeln freigeschnitten, um die Schnittlasten sichtbar zu machen. Mittels der Gleichgewichtsbedingungen können die Schnittlasten dann bestimmt werden.

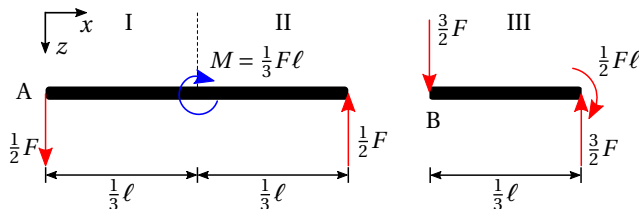


Bild 1.48 Bereichseinteilung des Balkensystems.

Für $x = \frac{1}{3}\ell$ stellt sich am Übergang zweier Bereiche wieder die Frage, zu welchem der beiden die Punktlast (in diesem Fall ein Punktmoment) zugeteilt werden soll. Es stellt sich heraus, dass diese Überlegung überflüssig ist, da der betrachtete Übergang durch geschickte Wahl der Schnittufer nicht sichtbar ist. In Abb. 1.49 wird für den Bereich I ein positives Schnittufer und für den Bereich II ein negatives verwendet.

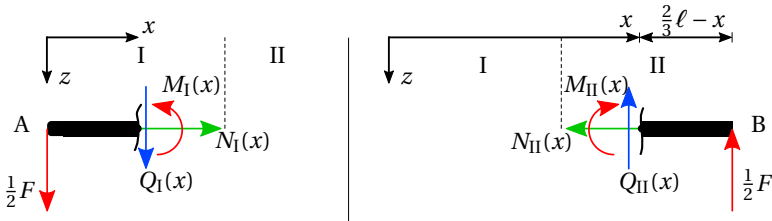


Bild 1.49 Bereichseinteilung des Balkensystems.

Die Gleichgewichtsbedingungen im Bereich I lauten:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= N_I(x) & \Rightarrow & N_I(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= Q_I(x) + \frac{F}{2} & \Rightarrow & Q_I(x) = -\frac{F}{2}, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= M_I(x) + x \frac{F}{2} & \Rightarrow & M_I(x) = -\frac{F}{2}x. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Hier ist S der Punkt, an dem der Schnitt durch den Balken durchgeführt wird. Im zweiten Bereich ist zu beachten, dass am negativen Schnittufer alle Schnittgrößen mit einem negativen Vorzeichen zu berücksichtigen sind:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= -N_{II}(x) & \Rightarrow & N_{II}(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= -Q_{II}(x) - \frac{F}{2} & \Rightarrow & Q_{II}(x) = -\frac{F}{2}, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= -M_{II}(x) + \left(\frac{2}{3}\ell - x\right) \frac{1}{2}F & \Rightarrow & M_{II}(x) = \frac{F\ell}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Man beachte, dass $M_{II}(x = \frac{2}{3}\ell) = 0$, da das Gelenk im Punkt B kein Moment aufnehmen kann. Solche Konsistenzprüfungen sind sehr empfehlenswert, da sich gerade beim Arbeiten mit mehreren Bereichen Rechenfehler einschleichen können. Für den dritten Bereich wird wieder ein positives Schnittufer gewählt, damit das angreifende Moment am rechten Rand nicht betrachtet werden muss:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= N_{III}(x) & \Rightarrow & N_{III}(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= Q_{III}(x) + \frac{3}{2}F & \Rightarrow & Q_{III}(x) = -\frac{3}{2}F, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= M_{III}(x) + \left(x - \frac{2}{3}\ell\right) \frac{3}{2}F & \Rightarrow & M_{III}(x) = \frac{3F\ell}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.138)$$

Der zugehörige Freischnitt wird hier nicht gezeigt, da er im wesentlichen aussieht wie in Abb. 1.49 (links), nur dass die dreifache Kraft wirkt und der Hebelarm um den Punkt S mit $x - \frac{2}{3}\ell$ gegeben ist. Jede der hier berechneten Funktionen ist nur in dem jeweiligen Bereich gültig.

Index

- 1-Kraft-Konzept, 378
- 1. Bredtsche Formel, 206
- 1. Eulersches Gesetz der Statik, 29
- 1. Hauptsatz der Thermodynamik, 337
- 2. Bredtsche Formel, 208
- 2. Eulerscher Satz der Statik, 29
- 2. Hauptsatz der Thermodynamik, 334, 339

- Abbildungsgeschwindigkeit, 279
- Absolutbeschleunigung, 322
- absolute Zeit, 318
- absoluter Raum, 318
- Absolutgeschwindigkeit, 321
- Accelerometer, 223
- actio = reactio, 23
- action, 382
- additiven Dekomposition, 136
- adiabatische Abschottung, 336
- aktuelle Platzierung, 134
- aktuelle Spannung, 144
- aktueller Lagevektor, 134
- Anfangsbedingung, 222
- Anisotropie, 136, 344
- Antisymmetrie, 245
- Arbeitssatz der Mechanik, 371
- Arbeitssatz Massenpunkt, 232, 233
- Arbeitssatz Massenpunktsystem, 240
- Arbeitssatz Starrkörper, 262
- Asperität, 102
- Aufpunkt, 24, 244
- Aufziehverfahren, 67, 95
- Ausflussfunktion, 297
- äußere Kräfte, 237
- äußerer Freischnitt, 23
- äußeres Skalarprodukt, 117
- Auswertemethode nach Coleman-Noll, 342
- Axialbeschleunigung, 225
- axialer Vektor, 25
- Axialgeschwindigkeit, 225

- Bahngeschwindigkeit, 226
- Bakzappregel, 21
- Balken, 62
- Balken schlank, 62
- Balkenbiegeformel, 155
- Balkenbiegung, 175
- begleitendes Dreibeins, 226
- Beobachterabhängigkeit, 340
- Beobachterpunkt, 279
- Bernoulli-Balkens, 175
- Bernoullihypothese, 173, 174
- Beschleunigung der relativen Translation, 322
- Beschleunigungssensoren, 223
- Beschleunigungsvektor, 222
- Bewegung, 284
- Bezugsrahmen, 318
- Biegelinie, 172
- Biegespannungen, 115
- biegesteife Verbindung, 51
- bijektive Abbildung der Bewegung, 134
- Binormaleneinheitsvektor, 88
- Binormalenvektor, 227
- Bogenlänge, 86
- Bogenträger, 51
- Boltzmannkonstante, 302
- Boostgeschwindigkeit, 321
- Bredtsche Formel, 205

- Capstangleichung, 108
- Cauchyspannung, 144
- center of gravity, 36
- charakteristisches Polynom, 123
- constitutive equations, 136, 300
- Coriolisbeschleunigung, 225, 322
- Cosseratmedien, 126
- Coulombsche Reibung, 102

- d'Alembertsche Trägheitskraft, 230, 373

- Darstellungssatz, 344
Darstellungstheorie, 349
Dashpot, 381
Deformationsgradient, 134
dehnungskontrolliert, 346
Dehnungspotential, 343
Dehnungsraum, 350
Determinante, 123
Deviationsmomente, 156, 182, 263
Deviator, 305
Diagonalisierung von Tensoren, 122
Differentialgeometrie Ebene, 86
Dirichletsche Randbedingungen, 141, 166
Dissipationsfunktion, 381
dissipative Kräfte, 232
dissipative Leistung Massenpunktsystem, 240
Divergenz, 289
Divergenz in Zylinderkoordinaten, 197
dog bone specimen, 144
doppelte äußere Überschiebung, 117
doppelte innere Überschiebung, 117
Drall, 265
Drallsatz der Statik, 29
Drallsatz für Ingenieurpraxis, 267
Drallsatz im Schwerpunkt, 267
Drallsatz in der Ebene, 267
Drallsatz Massenpunkt, 234
Drallsatz Massenpunktsysteme, 242
Drallsatz Starrkörper, 266
Drehimpuls Massenpunkt, 234
Drehimpuls Massenpunktsystem, 241
Drehimpuls Starrkörper, 265
Drehimpulserhaltung, 234
Drehtensor, 244
Druck, 113
Druckspannungen, 115
Duhamel-Neumann Gesetz, 136
Duhamel-Neumannsche Erweiterung, 139
dyadisches Produkt, 116
Dynamik, 17
dynamisches Gleichgewicht, 23
- ebener Spannungszustand, 127
Eigenbasis, 123
Eigenvektor, 122
Eigenwert, 122
Eigenwertproblem, 122
eindimensionaler Zugversuch, 143
einfache Überschiebung, 116
Einflusszahlen, 354
Einheitsnormalenvektor, 115
Einheitstensor, 20
Einsteinsche Summenkonvention, 19, 117
Einstensor, 117
einwertiges Lager, 47
Elastica, 172
elastische Dehnungen, 136
elastische Welle, 316
Elastizitätsmodul, 139, 143
Energieerhaltungssatz, 336
Energiefunktional, 363
Energieprinzip, 17
Energiesatz Massenpunkt, 233
Energiesatz Massenpunktsysteme, 240
Energiesatz Starrkörper, 263
Entartung, 123
Entropiebilanz, 339
Entropieprinzip, 300, 334
Entropiegleichung in lokaler Form, 339
Ergänzungsformänderungsenergiegedichte, 346
Erhaltungsgröße, 286, 335, 337, 339
Euklidischer Tensor, 300, 325, 347
Euler-Bernoulli-Balken, 174, 353
Euler-Eytelweinsche Seilreibung, 108, 109
Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen, 366
Euler-Theorem, 256
Eulerbeschleunigung, 225, 322
Eulerian description, 279
Eulerkinematik, 244
Eulers 1. Gesetz der Bewegung, 258
Eulers 2. Gesetz der Bewegung, 267
Eulersche Beschreibung, 279
Eulersche Kreisgleichungen, 270
Eulersche Winkel, 254
Eulersches Fluid, 300
Extension, 136
- Führungsbeschleunigung, 322
Führungsgeschwindigkeit, 321

- Fachwerk, 50
 Fahrstrahl, 221
 Federrückstellkraft, 381
 Feldbegriff, 277
 Feldgleichung, 338
 Fernwechselwirkung, 231
 Fernwirkungsprinzip, 23
 Festkörpermechanik, 279
 Festlager, 48
 fixed centrode, 247
 Flächeneinheitsnormalenvektors, 115
 Flächenmoment erster Ordnung, 39
 Flächenmoment zweiter Ordnung, 155
 Flächenschwerpunktes, 38
 Flächenträgheitsmoment, 155
 Flächenträgheitstensor, 180
 Flächenzentrum, 38
 Flüssigkeitsreibung, 305
 Fluidmechanik, 279
 Formänderungsenergie, 346
 Formänderungsenergiegedichte, 345
 Forminvarianz, 330, 331
 Fouriersches Wärmeleitungsgesetz, 342, 345
 Frame of Reference, 318
 free body diagram, 22
 freie Enthalpie, 342
 Freiheitsgrad, 387
 Freiheitsgrade, 47
 Freiheitsgrade Massenpunktsystem, 236
 Freischnitt, 22
 Frenetsche Gleichungen, 226
 Frenetsches Dreibein, 88
 Funktional, 363
 Funktionalableitung, 365
 Funktionalanalysis, 363
 Funktionalgleichung, 348
 Funtionalableitung, 282

 Gâteauxableitung, 282
 Galileitransformationen, 324
 Gangpolbahn, 247
 Gaußscher Satz, 120
 gebundener Vektor, 21
 gekrümmter Träger, 208
 gemischte Torsion, 198
 generalisierte Koordinaten, 237, 387
 generalisierte Verschiebung, 354
 generalisierten Kraft, 354
 geradlinig gleichförmige Bewegung, 230
 geschlossene Oberfläche, 119
 geschlossenes Volumen, 278
 Geschwindigkeitsgradient, 305
 Geschwindigkeitsvektor, 221
 Gestaltänderungsenergiehypothese, 213
 Gestaltänderungshypothese, 213
 Gewicht, 36
 Gibbssche Gleichung, 342
 Gibbssche Kreuzoperation, 322
 Gieren, 255
 Gleichgewicht am undeformierten System, 29
 Gleichgewichtsentropie, 342
 Gleitkraft, 103
 Gleitlager, 48
 Gleitreibung, 102, 381
 Gleitreibungskoeffizient, 103
 Gleitreibungskraft, 103
 globale Bilanz, 286
 Grassmann-Identität, 118

 Haften, 103
 Haftkraft, 103
 Haftreibung, 102
 Haftreibungskoeffizient, 103
 Haftreibungskraft, 103
 Hamiltonsches Prinzip, 384
 Hauptachsen, 263
 Hauptachsenbasis, 123
 Hauptachsensystem, 122
 Hauptachsentransformation, 122
 Hauptinvarianten, 123
 Hauptspannungen, 131
 Hauptspannungsrichtungen, 131
 Hauptträgheitsachsen, 181, 194
 Hauptträgheitsmomente, 181, 194
 hinreichende Bedingung Extremum, 365
 holonom, 236
 holonom-rheonom, 236
 Hookesches Gesetz, 139, 349
 Hookesches Gesetz für Scherung, 168
 Hundeknochenprobe, 144
 hyperbolische Differentialgleichung, 385

- Hypothese vom lokalen Gleichgewicht, 301
- ideales Gas, 301
- Impuls Massenpunkt, 228
- Impuls Massenpunkte, 237
- Impuls Starrkörper, 257
- Impulsbilanz der Statik, 125
- Impulssatz für Massenpunktsysteme, 239
- Inertialbeobachter, 317
- Inertialkräfte, 331
- Inertialsystemsbeobachter, 224
- Ingenieurspannung, 122, 144
- inkompressibles Material, 143
- innere Energie, 335
- innere Kräfte, 238
- innere Reaktionskräfte, 24
- instantaneous center of rotation, 246
- integrierender Faktor, 342
- isotroper Festkörper, 347
- Isotropie, 344
- Isotropieprinzip, 300
- Körperpunkt, 243
- Kalorik, 336
- Kanalströmung, 307
- Kette, 48
- kinematische Zwangsbedingungen, 236
- kinetische Energie, 334
- kinetische Energie Massenpunkt, 233
- kinetische Energie Massenpunktsystem, 239
- kinetische Energie Starrkörper, 261
- kinetische Reibkraft, 103
- kinetischer Reibbeiwert, 103
- Kleben, 174
- Knoten, 50
- Kompatibilitätsbedingungen, 153, 173
- komplementäre Formänderungsenergie, 346
- komplementäre Formänderungsenergie-dichte, 346
- Kompressibilität, 302
- Kompression, 136
- Kompressionsmodul, 349
- Kontaktkraft, 23
- Kontinuitätsgleichung, 289
- Kontinuumstheorie, 17
- Kontrollvolumen, 280
- konvektiver Fluss, 286
- Koordinatensystem global, 63
- Koppeltensor, 258
- Kräftegesetz, 29, 259
- Kräftegesetz 2D, 261
- Krümmung, 89
- Krümmungsvektor, 180
- Kraft, 19
- Kraftstoß, 230
- Kreuzprodukt, 20
- Kriechen, 113
- Kroneckersymbol, 20
- Kugelanteil, 305
- Kusinenformel, 170
- Lagevektor, 221
- Lagrangefunktion, 382
- Lagrangesche Beschreibungsweise, 284
- Lagrangesche Darstellung, 134
- Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, 387
- Lagrangian, 382
- Lamé-Naviersche Differentialgleichungen, 140
- Lamésche Elastizitätskonstanten, 138
- Laplaceoperator, 140, 294
- Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten, 197
- Laufgrad, 47
- Lavaldüse, 299
- Legendretransformation, 343
- Levi-Civita-Symbol, 20
- Lex Tertia, 23
- linear elastisch, 112
- linear-thermoelastischer Festkörper, 349
- lineare Elastomechanik, 29
- linearer Dehnungstensor, 135
- linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient, 137
- Linien Schwerpunkt, 38
- Linienzentrum, 39
- lokale Bilanz der kinetischen Energie, 334
- lokale Bilanz in regulären Punkten, 287
- Longitudinalwelle, 385
- Longitudinalwellen, 316
- Loslager, 48
- Massenbilanz, 289

- Massenträgheitstensor, 261
 Massenträgheitstensor in Komponenten, 263
 Massenzentrum, 37
 Materialfunktion, 121
 Materialgesetzen, 136
 Materialgleichungen, 300
 Materialpaarung, 103
 materielle Beschreibungsweise, 284
 materielle Zeitableitung, 280
 materieller Punkt, 277
 materielles Teilchen, 133, 277
 materielles Volumen, 278
 Maximum, 365
 mechanische Arbeit, 233
 mechanische Leistung, 233
 Mikropolartheorie, 126
 Minimalkalkül, 364
 Minimum, 365
 Mohrscher Kreis, 127, 136
 moment couple, 26
 Momentanpol, 246
 Momentenfläche, 63
 Momentengleichgewicht, 29
 Momentenpaar, 26
 Momentenschüttung, 63
 motion, 284
 moving centrode, 247
- Nablaoperator, 120
 Nablaoperator in Zylinderkoordinaten, 197
 natürliche Basis, 225
 Navier-Stokes-Gesetz, 305, 345
 Neumannsche Randbedingungen, 119, 142, 146, 167
 neutrale Faser, 154
 Newtons Grundgleichung der Statik, 29
 Newtonsche Bewegungsgesetze, 229
 nicht-holonom, 237
 nicht-holonome Zwangsbedingungen, 237
 nichtkonvektiver Fluss, 286
 Nicken, 255
 Nieten, 174
 Normaldehnungen, 135
 Normalkraftfläche, 63
 Normalspannungen, 115, 122, 127
 Normalspannungshypothese, 211
- notwendige Extremumsbedingung, 365
 Nullpunktsniveau, 240
 Nullstäbe, 52
 Nullstabsregeln, 52, 55
 Nutation, 255
- Oberflächenzufuhr, 286
 objektiver Tensor, 325
 observational point, 279
 offenes System, 280
 offenes Volumen, 278
 Orthogonalitätsrelationen, 244, 319
- partielle Differentialgleichungen, 300
 pdV-Thermodynamik, 338
 PdvK, 376
 PdvV, 368
 Pendelstütze, 47
 Pendelstab, 47
 physikalische Randbedingung, 187, 374
 Piola-Kirchhoff-Spannung, 144
 Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren, 122
 pitch, 255
 PMO, 331, 348
 Poissonbeziehung, 245
 Poissonzahl, 142
 Pol, 244
 polarer Vektor, 25
 polares Flächenmoment, 200
 Polarkoordinatenbasis, 224
 Polkurve, 247
 Potentialkräfte, 232, 381
 Potentials, 232
 potentielle Energie, 232
 potentielle Energie Massenpunktsystem, 240
 potentielle Energie Starrkörper, 263
 Präzession, 255
 primitive Größe, 18, 21
 principle of least action, 382
 principle of material objectivity, 331
 Prinzip der geringsten Wirkung, 382
 Prinzip der materiellen Objektivität, 300, 331, 348
 Prinzip der virtuellen Kraft, 376
 Prinzip der virtuellen Verrückungen, 368
 Prinzip von d'Alembert, 23

- Prinzip von Torricelli, 372
Produktionen, 286
- quasistatische Prozessführung, 301, 337
Quellstärke, 289
Querkontraktion, 142
Querkontraktionszahl, 139, 142
Querkraftbiegung, 113
Querkraftfläche, 63
- räumliche Beschreibung, 279
Radialbeschleunigung, 225
radiale Wechselwirkung, 238
Radialgeschwindigkeit, 225
Rahmen, 78
Rakete, 296
Rastpolbahn, 247
Reaktionskraft, 22
Rechtsgradient, 125
reference configuration, 284
reference placement, 284
Referenzfläche, 122
Referenzkonfiguration, 133, 284
Referenzspannung, 144
Referenztemperatur, 136
Reibkegel, 107
reibungsfreies Fluid, 300
reine Biegung, 113
reines Moment, 26
Relativbeschleunigung, 322
Relativgeschwindigkeit, 321, 330, 381
restraint, 47
Restungleichung, 342, 344
Resultierende, 19, 30
Reziprozitätssatz von Maxwell und Betti, 355
Ritterscher Schnitt, 55
Rodrigues Formel, 256
roll, 255
Rollen, 255
Rotation starrer Körper, 243
ruhender Beobachter, 224
- Sätze von Castigliano, 347, 356
Saint-Venant-Torsion, 198
Satz von Menabrea, 356
Satz von Steiner, 162, 195, 264
Schädigungsmechanismen, 173
Scherdehnungen, 135
Scherfestigkeit, 174
Scherspannungen, 115, 122, 127
Scherung, 114
Scherviskosität, 306
Scherwellen, 316
Scherwinkel, 168
Schiebehülse, 48
schiefen Biegung, 192
schiefer Biegung, 182
schlanker Balken, 174
Schmiegekreis, 87, 226
Schnittgrößen, 63
Schnittufer links, 64, 65
Schnittufer rechts, 65
Schub, 296, 299
Schubbruch, 211
Schubspannungen, 122
Schubspannungsfluss, 175
Schubspannungshypothese, 211
Schubstarrheit, 353
schubsteifer Balken, 172, 352
schwache Form, 369, 376
Schweißen, 174
Schwerpunkt, 36
Schwerpunkt Massenpunktsystem, 239
Schwerpunktsatz, 239, 260
Schwerpunktsatz 2D, 261
Seil, 48
Selbstsperrung, 105
semiinverse Methode, 141, 166, 199, 306
singuläre Fläche, 119
singuläre Punkte, 288
Skalar, 19
Skalarprodukt, 19
skleronom, 236
Spannungsfluss, 142
spannungskontrolliert, 346
Spannungskonzentrator, 142
Spannungsnachweis, 174
Spannungspotential, 342
Spannungsraum, 351
Spannungstensor, 116
Spannungstensor in Komponenten, 122
Spannungsvektor, 66, 115

- spatial description, 279
 Spatproduktsregel, 21
 Spektraldarstellung, 123
 spezifische Wärme, 336
 spezifische Wärme bei konstanter Dehnung, 349
 spezifisches Gewicht, 22
 Spin, 255
 Spintensor, 321
 Stabilitätsbedingung Fachwerk, 52
 starke Form, 369
 starre Bindung, 241
 Statik, 17
 stationär, 271
 stationäre Strömung, 306
 statisch überbestimmt, 47
 statisch bestimmtes Fachwerk, 52
 statisch bestimmtes System, 22, 30, 47
 statisch unbestimmte Systeme, 144
 statisch unterbestimmt, 47
 statische Reibkraft, 103
 statische Ruhelage, 381
 statischer Reibbeiwert, 103
 statisches Moment, 39, 170
 Steifigkeitstensor, 137
 Steifigkeitstetrad, 137
 Steiner-Anteile, 164
 Stoffgleichungen, 300
 Stokessche Reibung, 381
 Stokesscher Integralsatz, 206
 stored energy, 346
 stored energy density, 345
 Strahlungsterm, 337
 Stromfaden, 306
 substantielle Zeitableitung, 285
 Symmetrie des Spannungstensors, 126
- Tabellenverfahren, 37, 163
 Tachometergeschwindigkeit, 223
 Tangentialbeschleunigung, 227
 Temperatur, 336
 Tensor 2. Stufe, 116
 Testfunktion, 365
 Theorie 1. Ordnung, 112
 thermische Dehnungen, 136
 thermische Zustandsgleichung, 301, 344
- Thermodynamik quasistatischer Prozesse, 338
 thermoelastischer Festkörper, 340
 thrust, 296
 Torsion, 89, 114, 227
 totale Dehnung, 136
 totale Zeitableitung, 280
 Träger, 62
 Trägheitskraft, 22
 Trägheitsterme, 322
 Tragwerk statisch überbestimmt, 58
 Tragwerk statisch bestimmt, 58
 Tragwerk statisch unterbestimmt, 58
 Traktion, 115
 Translation starrer Körper, 243
 Translationsbewegung, 29
 transversal-isotrop, 264
 Transversalschwingung, 386
 Transversalwelle, 316
 Tresca-Kriterium, 211
 Tribologie, 102
 trockene Reibung, 102
 Trockenreibung, 102
- undeformiertes System, 139
 Unwucht, 263
- Variation am festen Rand, 365, 374
 Variation bei fester Kraft, 368
 Variationsrechnung, 363
 Variationssymbol, 365
 Vektor, 19
 Verdrehvektor, 179
 Verdrillung, 201
 Vergleichsspannung, 211
 Versagenshypothese, 211
 Verschiebungsgradient, 135
 Verschiebungsvektor, 134
 Verwindung, 202
 virtuelle Beschleunigungsarbeit, 368
 virtuelle Formänderungsenergie, 368
 virtuelle Impulsarbeit, 369
 virtuelle Verdrehung, 372
 viskoses Fließen, 112
 Viskositätskoeffizienten, 305
 Volumenkraft, 124

- Volumenviskosität, 306
- Volumenzentrum, 37
- von Mises-Spannung, 213

- Wärmeenergie, 335
- Wärmeflussvektor, 336
- Wärmeleitungsgleichung, 139
- Wölbkrafttorsion, 198
- wahre Spannung, 144
- Wandhaftung, 307
- Weg, 223, 225
- Wegunabhängigkeit der Arbeit, 381
- Wellengleichung, 316, 385
- Wichte, 22
- Widerstandsmoment, 155
- Winkelgeschwindigkeit, 225
- Winkelgeschwindigkeitstensor, 245, 321
- Winkelgeschwindigkeitsvektor, 245, 321
- Wirbeltensor, 325

- Wirkung, 382

- yaw, 255
- Youngscher Modul, 143

- Zeitableitung Massenträgheitstensor, 268
- zentrale Kräftegruppe, 30, 58
- Zentralkraft, 238
- Zentrifugalkraft, 23
- Zentrifugalmomente, 263
- Zentripetalbeschleunigung, 225, 227, 322
- Zentripetalkraft, 23
- Zerreißfestigkeit, 173
- Zufuhr, 286
- Zufuhrterm, 335
- Zug, 113
- Zugspannungen, 115
- Zwangskraft, 22, 233
- Zylinderkoordinaten, 196, 198