

7

Vollständige faktorielle Versuchspläne

Grundlage der Versuchsplanung

Dieses Kapitel behandelt Aufbau und Auswertung von vollständigen faktoriellen Versuchsplänen mit k Faktoren auf je zwei Stufen.

Beim Mittelwertvergleich in Kapitel 6 wurde ein Faktor auf zwei Stufen betrachtet. Vollständige faktorielle Versuchspläne sind eine Verallgemeinerung des Mittelwertvergleichs. Sie sind ein wichtiges „Arbeitspferd“ der Versuchsplanung und bilden die Grundlage für viele Weiterentwicklungen [1–5].

7.1 Zwei Faktoren auf je zwei Stufen

In diesem Abschnitt wird der Mittelwertvergleich zunächst auf zwei Faktoren erweitert. Dies ist der Beginn der eigentlichen Versuchsplanung.

7.1.1 Versuchsplan und Effekte

Bild 7-1 zeigt einen vollständigen faktoriellen Versuchsplan mit zwei Faktoren A und B auf je zwei Stufen, die mit – und + bezeichnet werden (z. B. den Faktor Druck auf den Stufen 450 mTorr und 600 mTorr und den Faktor Temperatur auf den Stufen 710 °C und 720 °C). Der Versuchsplan besteht aus $2^2 = 4$ Faktorstufenkombinationen, daher heißt er auch 2^2 -Plan.

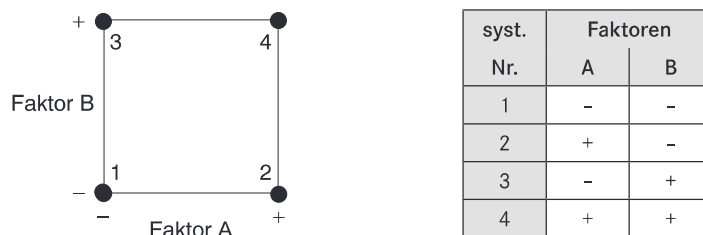


BILD 7-1 Ein vollständiger faktorieller 2^2 -Versuchsplan besteht aus den vier Faktorstufenkombinationen der zwei Faktoren A und B auf den Stufen – und +. Die Nummern 1–4 im Bild links entsprechen den Nummern in der Tabelle rechts (systematische Reihenfolge).

Bezeichnet man die Ergebnisse für die Zielgröße y bei den vier Faktorstufenkombinationen mit y_1, y_2, y_3 und y_4 , so ist z. B.

$\frac{y_2 + y_4}{2}$ der Mittelwert der Versuchsergebnisse mit A auf der Stufe +

$\frac{y_1 + y_3}{2}$ der Mittelwert der Versuchsergebnisse mit A auf der Stufe -.

Die Differenz der beiden Mittelwerte ist ein Maß für die Wirkung des Faktors A. Man nennt sie Effekt des Faktors A.

$$\text{Effekt A} = \frac{y_2 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_3}{2} \quad (7.1)$$

Analog ist der Effekt von B ein Maß für die Wirkung des Faktors B.

$$\text{Effekt B} = \frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (7.2)$$

Von einer Wechselwirkung AB spricht man, wenn der Effekt von A auf die Zielgröße davon abhängt, welchen Wert B hat (oder umgekehrt).

$y_4 - y_3$ ist der Effekt von A, wenn B auf der Stufe + steht.

$y_2 - y_1$ ist der Effekt von A, wenn B auf der Stufe - steht.

Die Differenz dieser beiden Effekte ist ein Maß dafür, wie stark die Wirkung des Faktors A vom Wert von B abhängt. Die Hälfte der Differenz nennt man Effekt der Wechselwirkung AB.

$$\text{Effekt AB} = \frac{y_4 - y_3}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_4 - y_2 - y_3 + y_1}{2} \quad (7.3)$$

Zum selben Ergebnis gelangt man, wenn man berechnet, wie stark die Wirkung des Faktors B vom Wert von A abhängt.

Aus den Ergebnissen bei den vier Faktorstufenkombinationen werden somit drei Effekte berechnet. Als vierte Größe kann der Mittelwert aller Ergebnisse berechnet werden. Er beschreibt die Lage der Versuchsergebnisse insgesamt, macht aber keine Aussage über die Wirkung der Faktoren.



Beispiel

Durch thermische Zersetzung in einem Rohrofen wird SiO_2 auf Si-Scheiben abgeschieden. Der Druck und die Temperatur im Ofen werden als Faktoren verändert, Zielgröße ist die Abscheiderate. Für den Faktor Druck werden als Stufen 450 mTorr und 600 mTorr, für den Faktor Temperatur 710 °C und 720 °C verwendet. Tabelle 7.1 zeigt die Versuchsergebnisse für die Abscheiderate (Mittelwerte von mehreren Realisierungen).

syst. Nr.	Druck [mTorr]	Temperatur [°C]	Abscheiderate [nm/min]
1	450 (-)	710 (-)	6,0
2	600 (+)	710 (-)	7,5
3	450 (-)	720 (+)	6,6
4	600 (+)	720 (+)	10,3

TABELLE 7.1
Versuchsplan und Versuchsergebnisse

Bild 7-2 zeigt links die Abscheiderate für die vier Faktorstufenkombinationen. Der Mittelwert der Versuchsergebnisse beträgt

$$\text{bei } 600 \text{ mTorr: } (7,5 + 10,3)/2 = 8,9 \text{ nm/min,}$$

$$\text{bei } 450 \text{ mTorr: } (6,0 + 6,6)/2 = 6,3 \text{ nm/min.}$$

Die Differenz der beiden Mittelwerte beträgt $8,9 - 6,3 = 2,6 \text{ nm/min}$. Dies ist der Effekt des Drucks. Bild 7-2 zeigt rechts die beiden Mittelwerte und den Effekt des Drucks. Er ist ein Maß für die Wirkung des Drucks auf die Abscheiderate.

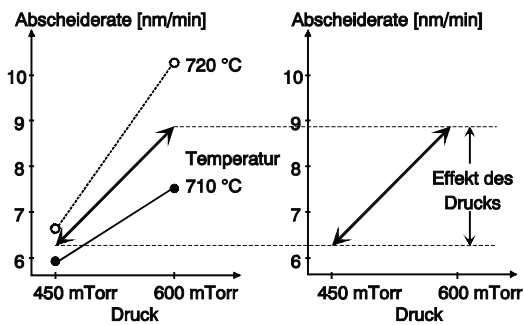


BILD 7-2

Grafische Darstellung der Abscheiderate für jede Faktorstufenkombination (links). Effekt des Drucks = 2,6

bedeutet:

Der Mittelwert der Abscheiderate beim Druck 600 mTorr ist um 2,6 nm/min höher als beim Druck 450 mTorr.

Bild 7-3 zeigt links die Abscheiderate für die vier Faktorstufenkombinationen wie in Bild 7-2. Der Mittelwert der Versuchsergebnisse beträgt

$$\text{bei } 720 \text{ °C: } (6,6 + 10,3)/2 = 8,45 \text{ nm/min,}$$

$$\text{bei } 710 \text{ °C: } (6,0 + 7,5)/2 = 6,75 \text{ nm/min.}$$

Die Differenz der beiden Mittelwerte beträgt $8,45 - 6,75 = 1,7 \text{ nm/min}$. Dies ist der Effekt der Temperatur. Bild 7-3 zeigt rechts die beiden Mittelwerte und den Effekt der Temperatur.

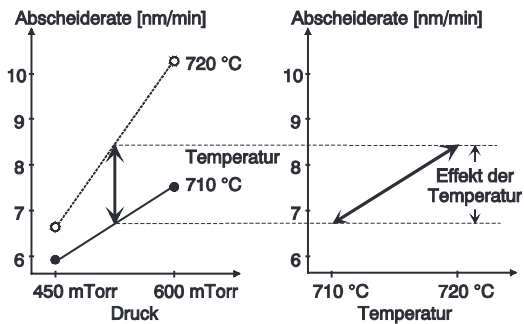


BILD 7-3

Grafische Darstellung der Abscheiderate, vgl. Bild 7-2. Effekt der Temperatur = 1,7 bedeutet:

Der Mittelwert der Abscheiderate bei Temperatur 720 °C ist um 1,7 nm/min höher als bei Temperatur 710 °C.

Bild 7-4 zeigt links die Abscheiderate für die vier Faktorstufenkombinationen wie in Bild 7-2. Der Effekt der Temperatur beträgt

bei 600 mTorr: $10,3 - 7,5 = 2,8$ nm/min,

bei 450 mTorr: $6,6 - 6,0 = 0,6$ nm/min.

Die Differenz der beiden Effekte beträgt $2,8 - 0,6 = 2,2$ nm/min. Der Effekt der Wechselwirkung ist die Hälfte dieser Differenz, also $1,1$ nm/min. Die Wechselwirkung ist somit ein Maß für die Abweichung von der Parallelität der Linien.

Bild 7-4 zeigt rechts eine alternative Darstellung der Wechselwirkung: Auf der x-Achse ist nun die Temperatur aufgetragen. Der Effekt des Drucks beträgt

bei 720 °C: $10,3 - 6,6 = 3,7$ nm/min,

bei 710 °C: $7,5 - 6,0 = 1,5$ nm/min.

Die Differenz der beiden Effekte beträgt $3,7 - 1,5 = 2,2$ nm/min, wie oben.

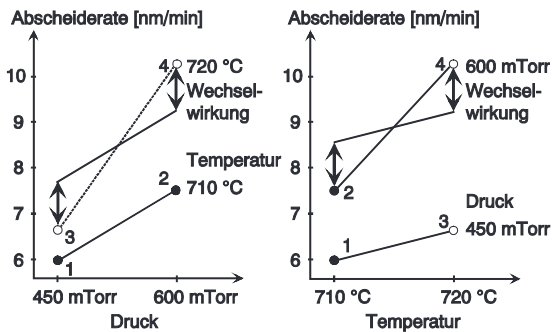


BILD 7-4

Grafische Darstellung der Abscheiderate, vgl. Bild 7-2. Der Effekt der Wechselwirkung zwischen Druck und Temperatur ist die Abweichung der Linien von der Parallelität (Pfeile links oder rechts).

7.1.2 Auswerteformalismus und Beurteilung der Signifikanz

Die Vorzeichen in den Gleichungen (7.1) und (7.2) zur Berechnung der Effekte von A und B sind identisch zu den Stufen der Faktoren A und B im Versuchsplan von Tabelle 7.1. Die Vorzeichen in Gleichung (7.3) zur Berechnung des Effekts der Wechselwirkung AB sind die Produkte der Vorzeichen von A und B. Aus dieser Beobachtung erhält man einen einfachen Auswerteformalismus (siehe Tabelle 7.2).

Die Signifikanz der Effekte wird wie in Abschnitt 6.3 beurteilt:

Wenn jede Faktorstufenkombination n-mal realisiert wurde und die Standardabweichung für alle Faktorstufenkombinationen gleich ist ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma$), dann ist analog zu (6.15)

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2}{4} \quad (7.4)$$

ein Schätzwert für die Varianz der Einzelwerte mit Freiheitsgrad

$$f = 4 \cdot (n - 1) = N - 4 \quad (7.5)$$

Jeder Effekt ist die Differenz zweier Mittelwerte von jeweils $N/2$ Einzelwerten. Daher erhält man wie in (6.14) als Schätzwert für die Standardabweichung eines Effekts

$$s_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{4}{N} \cdot s^2} \quad (7.6)$$

Ein Vergleich von (7.5) und (7.6) mit (6.14) und (6.16) zeigt eine große Ähnlichkeit, wenn man den Versuchsumfang N als Vergleichsbasis verwendet. Daher ist in der Versuchsplanung der Versuchsumfang N nützlicher als die Anzahl n der Realisierungen jeder Faktorstufenkombination (der Stichprobenumfang n). Im Folgenden wird in Formeln daher immer der Versuchsumfang N verwendet.

Um die Signifikanz der Effekte zu beurteilen, vergleicht man sie wie in Bild 6-17 mit der Breite des 95%, 99% und 99,9%-Vertrauensbereichs, d. h. man vergleicht jeden Effekt mit $\pm t \cdot s_{\bar{a}}$.



Beispiel (Fortsetzung)

Die Versuchsergebnisse in Tabelle 7.1 sind Mittelwerte von jeweils $n = 4$ Realisierungen, die in randomisierter Reihenfolge durchgeführt wurden (vgl. Tabelle 7.3). Tabelle 7.2 zeigt die Ergebnisse in systematischer Reihenfolge (syst. Nr. aus Bild 7-1).

TABELLE 7.2 Formalismus zur Auswertung von Versuchsergebnissen:

Spalten A und B: Versuchsplan gemäß Bild 7-1 für die Faktoren A und B

Spalte AB: Produkt der Vorzeichen in Spalten A und B

Einzelwerte: Ergebnisse der Einzelversuche

\bar{y}_i : Mittelwert der Einzelwerte einer Faktorstufenkombination (Zeile)

s_i^2 : Varianz der Einzelwerte einer Faktorstufenkombination (Zeile)

Zeile „ Σ “ (Summe):

Spalten A, B, AB: Summe der Spalte \bar{y}_i mit Vorzeichen der jeweiligen Spalte (z. B. in Spalte A: $5,2 = -6,0 + 7,5 - 6,6 + 10,3$)

Spalte s_i^2 : Summe der Varianzen ($2,38 = 0,247 + 1,333 + 0,500 + 0,300$)

Zeile „Effekt“: Summe/(Anzahl der Wertepaare) (hier 2; z. B. $2,6 = 5,2/2$)

s^2 : (Summe der Varianzen)/(Anzahl der Werte) ($0,595 = 2,38/4$)

syst. Nr.	Druck A	Temperatur B	WW AB	Einzelwerte Abscheiderate [nm/min]				\bar{y}_i	s_i^2
1	-	-	+	6,1	5,9	5,4	6,6	6,0	0,247
2	+	-	-	6,1	7,7	8,9	7,3	7,5	1,333
3	-	+	-	5,8	6,4	7,5	6,7	6,6	0,500
4	+	+	+	9,7	11,0	10,4	10,1	10,3	0,300
Σ	5,2	3,4	2,2						2,38
Effekt	2,6	1,7	1,1					$s^2 =$	0,595

Beurteilung der Signifikanz der Effekte:

$$s^2 = \frac{0,247 + 1,333 + 0,500 + 0,300}{4} = 0,595 = \text{Mittelwert der Einzelvarianzen}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{4}{16} \cdot 0,595} = 0,3857 = \text{Standardabweichung der Effekte}$$

$$f = 16 - 4 = 12 = \text{Freiheitsgrad.}$$

Mit Tabelle 6.4 erhält man:

$$95\%: t \cdot s_d = 2,179 \cdot 0,3857 = 0,840$$

$$99\%: t \cdot s_d = 3,055 \cdot 0,3857 = 1,178$$

$$99,9\%: t \cdot s_d = 4,318 \cdot 0,3857 = 1,665$$

Der Vergleich der Breiten der Vertrauensbereiche mit den Effekten zeigt:

$$\text{Effekt des Drucks} = 2,6 \quad ***$$

$$\text{Effekt der Temperatur} = 1,7 \quad ***$$

$$\text{Effekt der Wechselwirkung} = 1,1 \quad *$$

Analog zu Bild 6-17 zeigt Bild 7-5 den Vergleich der Effekte mit der Breite der Vertrauensbereiche grafisch. *** bedeutet, dass der Effekt aus dem durchgezogenen 99,9%-Niveau herausragt. * bedeutet, dass der Effekt zwischen dem gestrichelten 99% und dem punktierten 95%-Niveau liegt.

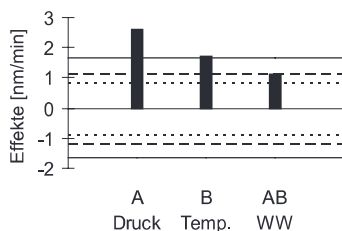


BILD 7-5

Grafische Darstellung des Signifikanztests:

Die Länge der Balken stellt die Effekte dar, die waagrechten Linien die Breite des 95%, 99%- und 99,9%-Vertrauensbereichs

7.1.3 Interpretation von Wechselwirkungen

Eine Wechselwirkung zwischen zwei Faktoren (Zwei-Faktor-Wechselwirkung, kurz 2FWW genannt) bedeutet, dass der Effekt des einen Faktors davon abhängt, welchen Wert der andere Faktor hat. Erfahrungsgemäß ist es schwierig, sich eine Wechselwirkung als eigenständige Größe vorzustellen. Daher wird empfohlen, bei der Interpretation von Versuchsergebnissen wie folgt vorzugehen:

- Die Effekte aller Faktoren und Wechselwirkungen werden formal berechnet und auf Signifikanz überprüft.
- Sind nur die Effekte der Faktoren selbst signifikant, so können die Faktoren getrennt betrachtet werden. Zur Auswahl der günstigeren Stufe für jeden (signifikanten) Faktor vergleicht man wie in Bild 7-2 oder 7-3 rechts die Mittelwerte der Versuchsergebnisse von Faktorstufe + und – miteinander (ihre Differenz ist der Effekt).
- Ist der Effekt der Wechselwirkung zwischen zwei Faktoren signifikant, so müssen diese beiden Faktoren immer gemeinsam betrachtet werden. Man berechnet die vier Mittelwerte für die verschiedenen Faktorstufenkombinationen getrennt und wählt die güns-

tigste Kombination aus. Was günstig ist, hängt von der Zielsetzung ab. Mit dem Ergebnis von Bild 7-4 kann man z. B. zu folgenden Ergebnissen gelangen:

- wenn das Ziel ein hoher Wert der Abscheiderate ist, ist die Kombination Temperatur 720 °C und Druck 600 mTorr günstig,
- wenn das Ziel eine geringe Abhängigkeit von der Temperatur ist, ist der Druck 450 mTorr günstig,
- wenn das Ziel eine geringe Abhängigkeit vom Druck ist, ist die Temperatur 710 °C günstig.

Wechselwirkungen sind weit verbreitet. Es ist normal, dass der Effekt eines Faktors davon abhängt, welchen Wert ein anderer Faktor hat. Einige typische Situationen, in denen Wechselwirkungen wichtig sind, sollen dies verdeutlichen:

- Die Lage des Optimums für einen Faktor hängt vom Wert des anderen Faktors ab (a).
- Wenn zwei ungünstige Faktorstufen zusammentreffen, treten Probleme auf (b).
- Zwei Faktoren wirken sich multiplikativ auf die Zielgröße aus (c).



Beispiele

1. In einer Fertigung werden Teile von zwei verschiedenen Lieferanten A und B auf zwei parallelen Anlagen 1 und 2 verarbeitet. Die Teile von Lieferant A lassen sich besser auf Anlage 1, die Teile von Lieferant B besser auf Anlage 2 verarbeiten (a).
2. Bei der Optimierung der Einstellung einer Belichtungsanlage erhält man gute Ergebnisse bei großer Blende und kurzer Belichtungszeit und bei kleiner Blende und großer Belichtungszeit (d. h. bei mittlerer Lichtmenge) (a).
3. In einer Fertigung werden zugelieferte Teile von zwei verschiedenen Lieferanten A und B auf zwei parallelen Anlagen 1 und 2 weiterverarbeitet. Teile von Lieferant A lassen sich nur an Anlage 1 gut verarbeiten, bei Lieferant B ist das Ergebnis unabhängig von der Anlage (b).
4. In einer Fertigung werden zwei verschiedene Lotpasten eingesetzt. Eine dieser Lotpasten macht Probleme, wenn die Luftfeuchtigkeit hoch ist (b).
5. Beim Setzen von Kleberpunkten mit einer Spritze führt eine bestimmte Vergrößerung des Kanüledurchmessers zu einer Verdoppelung des Punktvolumens, und eine bestimmte Verlängerung der Zeit führt ebenfalls zu einer Verdoppelung. Dann erwartet man bei großem Durchmesser und langer Zeit eine Vervierfachung. Bei kleiner Kanüle führt die Verlängerung zu einer Vergrößerung des Volumens von 1 auf 2, also um 1. Bei großer Kanüle führt die Verlängerung zu einer Vergrößerung des Volumens von 2 auf 4, also um 2 (c).

Manchmal kann man durch eine geeignete Wahl der Faktoren und/oder Zielgrößen vorhersehbare Wechselwirkungen vermeiden. Im obigen Belichtungsbeispiel ist es günstiger, die Lichtmenge als Faktor zu verwenden, im Beispiel Kleberpunkte vermeidet man die Wechselwirkung, wenn man den Logarithmus des Volumens als Zielgröße verwendet. Man kann jedoch nicht davon ausgehen, dass dies immer gelingt. Daher ist es sicherer, Wechselwirkungen mit zu berücksichtigen.

7.1.4 Randomisierung und Blockbildung

In Absatz 3.4.3 und 3.4.4 wurde beschrieben, wie durch Blockbildung und Randomisierung innerhalb der Blöcke eine Verfälschung der Versuchsergebnisse durch einen eventuell vorhandenen Trend oder andere systematische Unterschiede weitestgehend vermieden werden kann. Hier soll die Umsetzung von Blockbildung und Randomisierung am Beispiel von Absatz 7.1.1 gezeigt werden.

TABELLE 7.3 Vollständiger faktorieller 2²-Versuch mit 4 Realisierungen mit Blockbildung und randomisierter Reihenfolge innerhalb der Blöcke:

Jede Zeile stellt einen Einzelversuch dar.

1. Spalte: Reihenfolge, in der Einzelversuche durchgeführt werden
2. Spalte: Nummer der Faktorstufenkombination in Tabelle 7.1 bzw. 7.2
3. Spalte: Nummer der Realisierung (d. h. Block)
4. und 5. Spalte: Stufen der Faktoren bei jedem Einzelversuch
6. Spalte: Versuchsergebnisse aus Tabelle 7.2
7. Spalte: Postulierte Verfälschung durch einen Trend in den Ergebnissen
8. Spalte: Versuchsergebnisse mit Trend (Summe von 6. und 7. Spalte)

Vers. Nr.	syst. Nr.	Realisierung (Block)	Faktor A	Faktor B	Rate ohne Trend	Trend	Rate mit Trend
1	2	1	+	-	6,1	0,1	6,2
2	3	1	-	+	5,8	0,2	6,0
3	1	1	-	-	6,1	0,3	6,4
4	4	1	+	+	9,7	0,4	10,1
5	4	2	+	+	11,0	0,5	11,5
6	2	2	+	-	7,7	0,6	8,3
7	3	2	-	+	6,4	0,7	7,1
8	1	2	-	-	5,9	0,8	6,7
9	1	3	-	-	5,4	0,9	6,3
10	3	3	-	+	7,5	1,0	8,5
11	2	3	+	-	8,9	1,1	10,0
12	4	3	+	+	10,4	1,2	11,6
13	3	4	-	+	6,7	1,3	8,0
14	1	4	-	-	6,6	1,4	8,0
15	4	4	+	+	10,1	1,5	11,6
16	2	4	+	-	7,3	1,6	8,9

Die vier Faktorstufenkombinationen einer Realisierung bilden jeweils einen Block. Sie werden nacheinander durchgeführt. Randomisierung bedeutet, dass die Reihenfolge der vier Einzelversuche in jeder Realisierung zufällig (und unterschiedlich) ist. So ergibt sich z. B. die in Tabelle 7.3 dargestellte Reihenfolge der Einzelversuche. Um die Wirkung von Blockbildung und Randomisierung zu demonstrieren, wird in Tabelle 7.3 ein Trend unterstellt, der dazu führt, dass sich das Ergebnis von Einzelversuch zu Einzelversuch jeweils um 0,1 erhöht.

TABELLE 7.4 Auswertung der Versuchsergebnisse mit Trend aus Tabelle 7.3 (Bezeichnungen wie in Tabelle 7.2, ohne Korrektur für den Trend)

syst. Nr.	A	B	AB	Einzelwerte Rate [nm/min]				\bar{y}_i	s_i^2
1	-	-	+	6,4	6,7	6,3	8,0	6,85	0,617
2	+	-	-	6,2	8,3	10,0	8,9	8,35	2,550
3	-	+	-	6,0	7,1	8,5	8,0	7,40	1,207
4	+	+	+	10,1	11,5	11,6	11,6	11,2	0,540
Σ	5,3	3,4	2,3						4,914
Effekt	2,65	1,7	1,15					$s^2 =$	1,228

Tabelle 7.4 zeigt die Ergebnisse aus Tabelle 7.3 in der systematischen Reihenfolge (wie in Tabelle 7.2). Die Auswertung in Tabelle 7.4 nutzt nur die Randomisierung aus. Die Blockstruktur ist nicht berücksichtigt.

Durch Randomisierung wurde vermieden, dass der Trend die Schätzwerte für die Effekte mehr als zufällig verfälscht. Allerdings hat sich der Schätzwert für die Varianz erhöht, weil die Einzelwerte in Tabelle 7.4 aufgrund des Trends von Spalte zu Spalte zunehmen. Dadurch verändert sich die Signifikanz der Effekte.

TABELLE 7.5 Auswertung der Versuchsergebnisse mit Trend aus Tabelle 7.3 (mit Korrektur für den Trend – von jedem Block [= jeder Spalte] wurde der jeweilige Mittelwert abgezogen)

syst. Nr.	A	B	AB	korrigierte Einzelwerte				\bar{y}_i	s_i^2
1	-	-	+	-0,775	-1,7	-2,8	-1,125	-1,6	0,785
2	+	-	-	-0,975	-0,1	0,9	-0,225	-0,1	0,594
3	-	+	-	-1,175	-1,3	-0,6	-1,125	-1,05	0,095
4	+	+	+	2,925	3,1	2,5	2,475	2,75	0,097
Σ	5,3	3,4	2,3						1,571
Effekt	2,65	1,7	1,15					$s^2 =$	0,393

In Tabelle 7.5 wird zusätzlich die Blockbildung ausgenutzt. In jedem Block (= Spalte der Einzelwerte) tritt jede Faktorstufenkombination genau einmal auf. Daher sollten sich die Mittelwerte der Blöcke nur zufällig unterscheiden. Von den Versuchsergebnissen für jeden Block wird daher der Mittelwert dieses Blocks abgezogen, d. h. in Tabelle 7.5 sind von den Spalten der Einzelwerte in Tabelle 7.4 jeweils die Mittelwerte der Spalten (7,175; 8,40; 9,10 und 9,125) abgezogen.

Das Abziehen der Mittelwerte hat keinen Einfluss auf die Effekte, man erhält jedoch eine deutlich reduzierte Streuung, weil Unterschiede zwischen den Blöcken nicht mehr eingehen.

Durch das Abziehen der Blockmittelwerte hat man jedoch nicht nur die systematischen Unterschiede zwischen den Blöcken eliminiert, sondern auch die zufälligen Unterschiede (in Tabelle 7.2 sind die Mittelwerte der Spalten auch nicht gleich, obwohl es keinen Trend gibt). Dadurch unterschätzt man die Streuung jetzt, und eine Korrektur ist erforderlich. Bei b Blöcken reduziert sich durch das Abziehen der b Blockmittelwerte der Freiheits-

grad f um $b-1$ (der Gesamtmittelwert geht auch ohne Berücksichtigung der Blöcke nicht in die Rechnung ein) und man erhält statt (7.4) und (7.5):¹

$$f_{\text{korr}} = f - b + 1 \quad (7.7)$$

$$s_{\text{korr}}^2 = \frac{f}{f_{\text{korr}}} \cdot s^2 \quad (7.8)$$

Für Tabelle 7.5 erhält man ($b = 4$ Blöcke):

$$f_{\text{korr}} = f - 4 + 1 = 12 - 3 = 9$$

$$s_{\text{korr}}^2 = \frac{12}{9} \cdot 0,393 = 0,524$$

Diese korrigierte Varianz unterscheidet sich nur zufällig vom Ergebnis ohne Trend im Anschluss an Tabelle 7.2. Durch Randomisierung konnte vermieden werden, dass der Trend die Effekte verfälscht. Aufgrund der Blockbildung konnte der Unterschied zwischen den Blöcken aus der Zufallsstreuung herausgerechnet werden (vgl. Tabelle 7.5 mit 7.4).

Tabelle 7.3 stellt somit eine ideale Reihenfolge für die Durchführung der Versuche dar. Für diese Reihenfolge müssen die Faktorstufen von Einzelversuch zu Einzelversuch geändert werden. Dies kann zu einem hohen Versuchsaufwand führen.

In der Praxis wird daher häufig der Wunsch geäußert, alle Realisierungen derselben Faktorstufenkombination (mit derselben systematischen Nummer) hintereinander durchzuführen. Dies sollte nur gemacht werden, wenn die Einstellung aller Faktorstufen genau reproduzierbar ist und wenn keine systematische Veränderung der Ergebnisse mit der Zeit (d. h. kein Trend) zu befürchten ist.

Ist die Änderung eines der Faktoren sehr aufwändig, so wird häufig der Wunsch geäußert, zunächst alle Versuche mit einer Stufe dieses Faktors durchzuführen und erst dann alle Versuche mit der anderen Stufe. Dies sollte nur im Extremfall geschehen, da dann ein Trend den Schätzwert für den Effekt dieses Faktors verfälschen kann (vgl. dazu auch Absatz 3.4.5).



Aufgabe

Die Ausbeute einer chemischen Reaktion soll erhöht werden. In einem Brainstorming wurden als vermutlich wichtigste Faktoren die Temperatur und der Druck festgelegt. Momentan sind bei der Anlage eine Temperatur von 100 °C und ein Druck von 2 bar eingestellt. Es soll untersucht werden, ob eine Erhöhung der Temperatur auf 120 °C und/oder eine Erhöhung des Drucks auf 3 bar zu einer Verbesserung der Ausbeute führt.

¹ Software führt diese Korrekturen durch, ohne dass sich der Anwender darum kümmern muss. Ziel dieser Darstellung ist vor allem, durch eine einfache Rechnung den Hintergrund zu erläutern. Software nutzt zur Darstellung der Ergebnisse häufig Bezeichnungen aus der Varianzanalyse (siehe Kapitel 12), für das Verständnis der Vorgehensweise ist Varianzanalyse jedoch nicht erforderlich.

- a) Stellen Sie einen Versuchsplan auf. In welcher Reihenfolge würden Sie die Versuche durchführen, wenn jede Faktorstufenkombination zweimal realisiert werden soll? Diskutieren Sie Vor- und Nachteile verschiedener Alternativen.
- b) Bei der Durchführung der Versuche wurden folgende Ausbeuten gemessen. Vervollständigen Sie die Tabelle, und berechnen Sie die Effekte von Temperatur, Druck und Wechselwirkung. Welche Effekte sind signifikant? Welche Faktorstufenkombination werden Sie in Zukunft verwenden?

syst. Nr.	Temperatur	Druck	WW	Einzelausbeute [%]		Mittel \bar{y}	Varianz s^2
1	-	-		70,3	69,2	69,75	0,605
2	+	-		64,5	65,0	64,75	0,125
3	-	+		58,0	59,9	58,95	1,805
4	+	+		72,6	71,9		

Lösung

- c) Vollständiger faktorieller 2^2 -Versuchsplan in systematischer Reihenfolge:

syst. Nr.	Temperatur	Druck
1	100 °C	2 bar
2	120 °C	2 bar
3	100 °C	3 bar
4	120 °C	3 bar

Mögliche Reihenfolgen der Einzelversuche (Auswahl – die Beispiele sollen nur das Prinzip zeigen):

1. Randomisierte Reihenfolge der Einzelversuche mit $n = 2$

Vers. Nr.	syst. Nr.	Block	Temperatur	Druck	Ausbeute
1	2	1	120 °C	2 bar	
2	4	1	120 °C	3 bar	
3	1	1	100 °C	2 bar	
4	3	1	100 °C	3 bar	
5	4	2	120 °C	3 bar	
6	1	2	100 °C	2 bar	
7	3	2	100 °C	3 bar	
8	2	2	120 °C	2 bar	

Vorteile: Wegen Randomisierung keine Verfälschung der Effekte durch Trend.

Zufallsstreuung wird voll erfasst.

Unterschied zwischen Blöcken kann erkannt und eliminiert werden.

Nachteil: Häufige Änderung der Stufen, dadurch u. U. hoher Versuchsaufwand.