1 Dreiphasenwechselspannung und -strom

In den Anfängen der elektrischen Energieerzeugung bestand lange Zeit ein Wettstreit zwischen der „richtigen“ Form der Übertragung der elektrischen Energie: dem Gleichstrom- oder Wechselstromsystem, bei dem sich schon bald das Wechselstromsystem durchsetzen konnte.

In den folgenden Abschnitten wird das aktuelle Dreiphasen-Wechselspannungssystem von der Erzeugung, den Beschreibungsformen über die Verkettung bis hin zur symmetrischen und unsymmetrischen Belastung in komplexer Darstellungsform dargestellt.

1.1 Erzeugung und Beschreibungsformen

Das heutige Dreiphasen-Wechselspannungssystem bildet die Hauptform der elektrischen Energieübertragung. Gegenüber dem Einphasen-Wechselspannungssystem oder dem Gleichspannungssystem besitzt es verschiedene Vorteile:

- einfache Erzeugung mit Drehstrom-Synchrongeneratoren
- gute Ausnutzung der Transportleitungen (Übertragungsleistung/Leitermaterialaufwand)
- zwei unterschiedliche Spannungen (Stern- und Leiterspannung)
- einfache Wandlung in Gleichspannung
- direkter Betrieb von Drehstrommotoren
- konstante Leistung bei symmetrischer Last: $p(t) = P$

Drehstrom-Synchrongeneratoren erzeugen in den drei Wicklungssträngen des Stators (Ständers) drei voneinander unabhängige sinusförmige Wechselspannungen (Bild 1.1)

In Bild 1.2 ist der 4-polige Läufer (Rotor) eines Drehstrom-Synchrongenerators dargestellt. Die drei Ständerwicklungen U, V und W des Stators sind räumlich in einem Winkel von 120° zueinander angeordnet. Bei gleichmäßiger Drehung des Rotors wird durch dessen Magnetfeld in den drei Wicklungen jeweils eine Spannung induziert, die von Wicklung zu Wicklung eine zeitliche Verschiebung (Phasenverschiebung) von ebenfalls 120° aufweisen.

Die Dreiphasenwechselspannung kann auf verschiedene Arten dargestellt oder beschrieben werden:

- grafisch, als Zeigerbild oder im Liniendiagramm (Bild 1.3),
- mathematisch, als Funktions- oder Momentanwertgleichung oder
- als komplexe Gleichung.

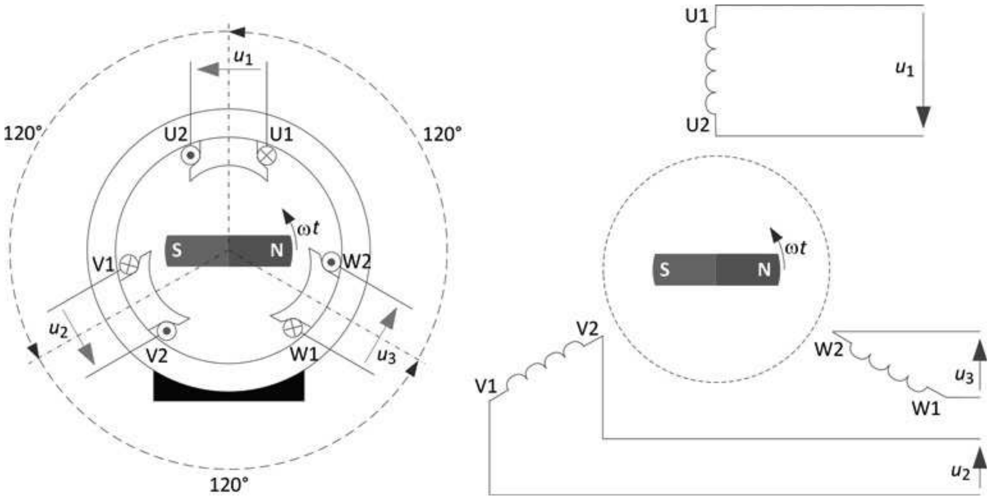

Bild 1.1 2-poliger Generator (links) und Schaltbild (rechts)

Bild 1.2 4-poliger Rotor/Läufer eines Drehstrom-Synchrongenerators (© ABB AG, 2018)

Zeigerbild und Liniendiagramm

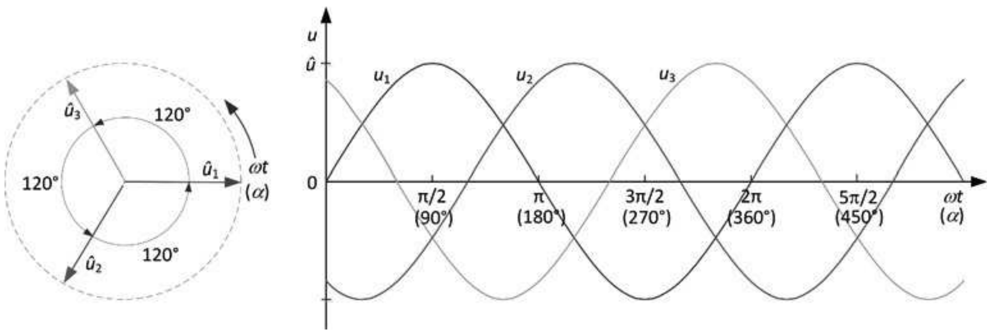

Bild 1.3 Zeigerbild (links) und Liniendiagramm (rechts)

Momentanwertgleichung (Sinusform)

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u}_1 \cdot \sin\omega t \\ u_2 &= \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t - 120°) \\ u_3 &= \hat{u}_3 \cdot \sin(\omega t - 240°) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Für die Sinusform gilt:

$$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U \tag{1.2}$$

$\hat{u}$ – Scheitel- oder Maximalwert
U – Effektivwert (quadratischer Mittelwert)

Damit gilt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2} \cdot U_1 \sin\omega t \\ u_2 &= \sqrt{2} \cdot U_2 \sin(\omega \mathrm{t} - 120°) \\ u_3 &= \sqrt{2} \cdot U_3 \sin(\omega t - 240°) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Komplexe Schreibweise (Vektorform)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= U_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} \\ \underline{U}_2 &= U_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} \\ \underline{U}_3 &= U_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}240°} \end{aligned} \tag{1.4}$$

> **!** Die komplexe Darstellung bietet sich immer dann an, wenn bei Berechnungen nicht nur die Beträge, sondern auch die Winkel von Bedeutung sind. Da Spannungen und Ströme in Wechsel- und Drehstromsystemen immer neben den Beträgen auch eine Phasenlage besitzen, also eine zeitlich/räumliche Orientierung aufweisen, ist die einfache Betragsrechnung eher die Ausnahme.

Die Spannungen der drei Phasen werden mit U, V und W bezeichnet. Entspricht die Phasenfolge der in Bild 1.3 dargestellten,

- die Phase V eilt der Phase U um 120° nach und
- die Phase W eilt der Phase V um 120° nach,

also der Phasenfolge $U \rightarrow V \rightarrow W$, so entsteht in einem Dreiphasen-Wechselstrommotor ein Rechtsdrehfeld, d. h., der Motor läuft im Rechtslauf (positive Phasenfolge).

Durch Vertauschen von zwei Phasen kommt es zu einer Änderung der Drehrichtung im Drehstrommotor, und der Motor würde in Linkslauf betrieben (negative Phasenfolge).

> **!** Drehstrom-Steckvorrichtungen (Bild 1.4) müssen so angeschlossen werden, dass sich ein Rechtsdrehfeld ergibt, wenn man die Steckbuchsen von vorn im Uhrzeigersinn betrachtet (vgl. DIN VDE 0100-550:1988-04).

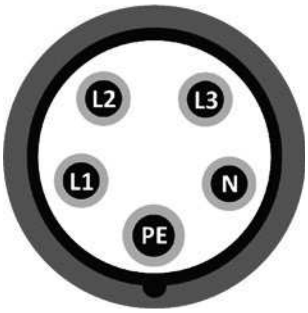

Bild 1.4 CEE-Steckbuchse

1.2 Verkettung

Zur Leistungsübertragung mit dem offenen System würden sechs Leitungen benötigt. In der Praxis werden die drei getrennten Spannungen zu einem **Dreiphasen-System** verbunden oder verkettet. Unter dem Begriff **Verkettung** versteht man die Verbindung einzelner Stromkreise zu einem Stromkreis – hier zum Dreiphasen-Wechselspannungssystem oder zum Dreiphasen-Wechselstromsystem (Drehstrom).

Bei der Verkettung sind zwei Varianten möglich:

- Sternschaltung
- Dreieckschaltung

Werden die drei Wicklungsstränge des Generators so miteinander verbunden oder verkettet, wie in Bild 1.5 (links) dargestellt ist, so liegt die **Sternschaltung** (Y-Schaltung) vor.

Werden die drei Wicklungsstränge des Generators so miteinander verbunden oder verkettet, wie in Bild 1.5 (rechts) dargestellt ist, so liegt die **Dreieckschaltung** (Δ-Schaltung) vor.

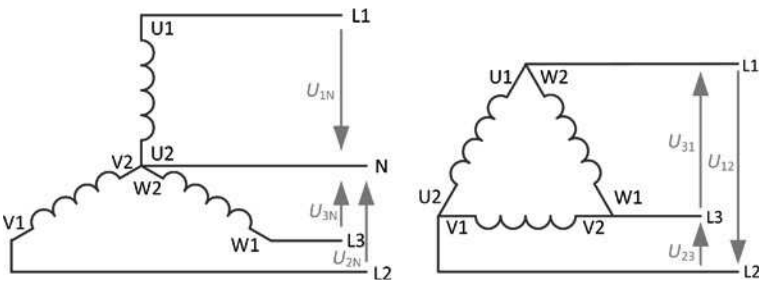

Bild 1.5 Sternschaltung (links) und Dreieckschaltung (rechts)

Leiter- und Spannungsbezeichnungen

Die spannungsführenden elektrischen Leiter, die die Versorgungsspannung, elektrische Betriebsmittel oder Geräte bilden, werden bei Gleichspannungsversorgung mit L+ und L–, im einphasigen Wechselspannungsnetz mit L1 und N und im dreiphasigen Wechselspannungsnetz mit L1, L2 und L3 (entsprechend der Phasenfolge) gekennzeichnet (Tabelle 1.1). Um bei Spannungsangaben ebenfalls eine Eindeutigkeit zu haben, werden diese entsprechend der beiden Punkte bezeichnet, zwischen denen die jeweilige Potenzialdifferenz oder Spannung gemessen wird. Tragen z. B. die beiden Punkte die Bezeichnungen L1 und N, so lautet die von Punkt L1 nach N gemessene Spannung U1N oder zwischen den Außenleitern L1 und L2 U12.

Tabelle 1.1 Leiter- und Spannungsbezeichnungen

Bezeichnungen	Erläuterungen
L1 L2 L3: Außenleiter	▪ alte Bezeichnung: R – S – T ▪ am Betriebsmittel allgemein: U – V – W ▪ Farbkennzeichnung: grau – schwarz – braun
N: Neutralleiter	▪ auch Sternpunkt- oder Mittelleiter (früher: MP) ▪ Farbkennzeichnung: hellblau
U_{12} U_{23} U_{31}: Außenleiterspannung	▪ Leiterspannung oder Dreieckspannung zwischen zwei Außenleitern mit zeitlich aufeinanderfolgenden Phasen (Dreieckspannungen)
U_{1N} U_{2N} U_{3N}: Sternspannung	▪ Spannung zwischen einem Außenleiter und dem Sternpunktleiter
U_{UV} U_{VW} U_{WU}: Strangspannung	▪ Spannung zwischen den beiden Enden eines Strangs

Werden zwei Indizes verwendet, so entspricht die Reihenfolge der Indizes der Bezugsrichtung, z. B. U_{12}. Durch die Verkettung können zwei Spannungen bereitgestellt werden:

- **Leiterspannung** (Außenleiterspannung oder Dreieckspannung) und
- **Sternspannung** (zwischen einem Außenleiter und dem Sternpunkt gemessene Spannung)

Im Liniendiagramm (Bild 1.6) sind die Signal-Zeitverläufe der Sternspannungen (u_{1N}, u_{2N}, u_{3N}) und der Leiterspannungen (u_{12}, u_{23}, u_{31}) abgebildet. Aus dem Liniendiagramm ist erkennbar, dass die beiden Spannungen unterschiedliche Scheitelwerte und damit auch Effektivwerte (geometrische Mittelwerte) aufweisen.

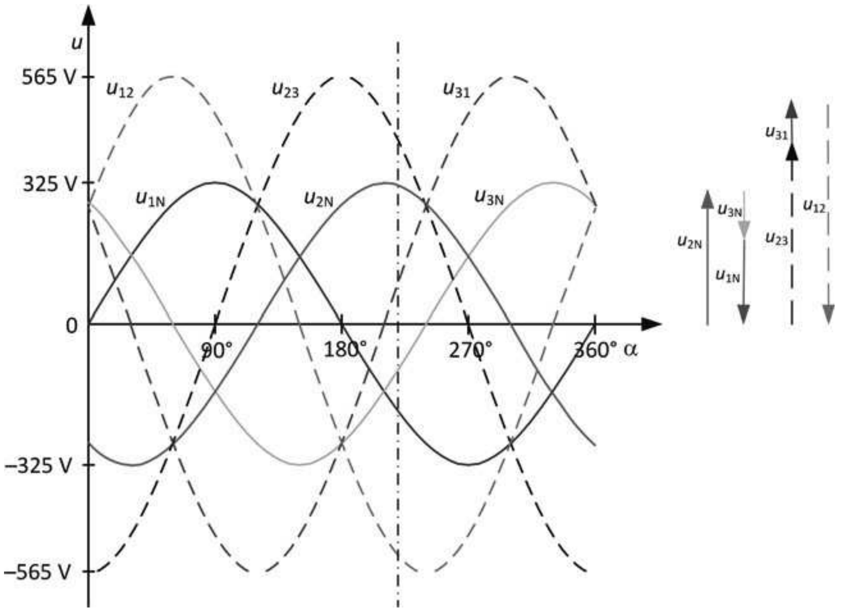

Bild 1.6 Liniendiagramm (links) und Augenblickswerte (rechts)

Für die Spannungen des symmetrischen Dreiphasen-Wechselspannungssystems gilt (wie zum Zeitpunkt der Strich-Punkt-Linie dargestellt):

$$\sum u = 0 \tag{1.5}$$

Der Scheitelfaktor $\sqrt{2}$ behält weiterhin seine Gültigkeit, da sich an der Sinusform der Spannungen nichts geändert hat. Die Sternschaltung (Bild 1.5 links) bildet ein 4-Leiter-System, bei dem neben den Sternspannungen auch die Leiterspannungen abgegriffen werden können (Bild 1.7). Für diese Spannungen gelten folgende Spannungsgleichungen, mit denen die Umrechnung von der Sternschaltung in die Dreieckschaltung u. U. erfolgen kann:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N} \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{1N} \end{aligned} \tag{1.6}$$

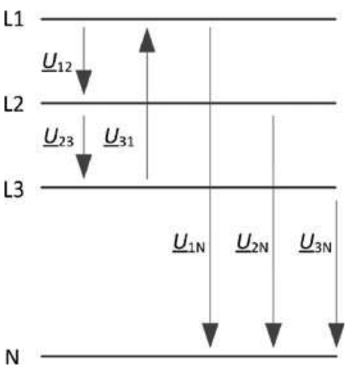

Bild 1.7 Leiterspannungen im 4-Leiter-System

Anhand des Zeigerbildes (Bild 1.8) kann dann die Umrechnung durchgeführt werden:

$$U_{12} = U_{1N} \cdot \cos 30° + U_{2N} \cdot \cos 30° \tag{1.7}$$

mit $U_{1N} = U_{2N}$

$$U_{12} = 2 \cdot U_{1N} \cdot \cos 30° \tag{1.8}$$

mit $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$U_{12} = \sqrt{3} \cdot U_{1N} \tag{1.9}$$

oder allgemein

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{St} \tag{1.10}$$

oder: Leiterspannung = $\sqrt{3}$ · Sternspannung

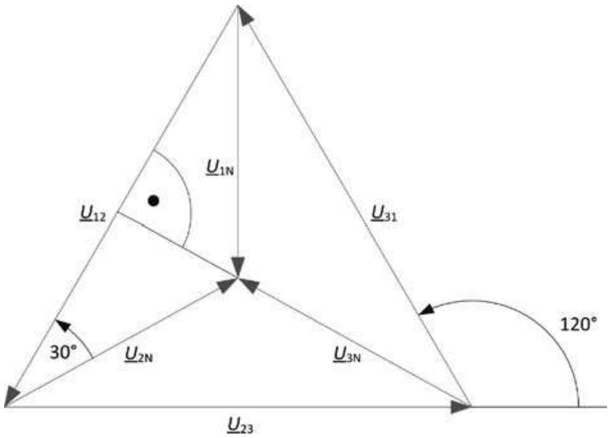

Bild 1.8 Verkettung

Im Dreiphasen-System wird der Faktor $\sqrt{3}$ auch als **Verkettungsfaktor** bezeichnet.

Bei symmetrischen Systemen gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 &= 0 \\ \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Für die Sternschaltung gilt:

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{\mathrm{St}} \tag{1.12}$$

U – Leiterspannung (z. B. U_{12})
U_{St} – Sternspannung (z. B. $U_{1\mathrm{N}}$)

Für die Dreieckschaltung gilt:

$$U = U_{\mathrm{St}} \tag{1.13}$$

U – Leiterspannung (z. B. U_{12})
U_{St} – Strangspannung (z. B. U_{12})

Die im 4-Leiter-System verknüpften Spannungen lassen sich auch, wie in Bild 1.9 abgebildet, mit ihren jeweiligen Phasenlagen darstellen.

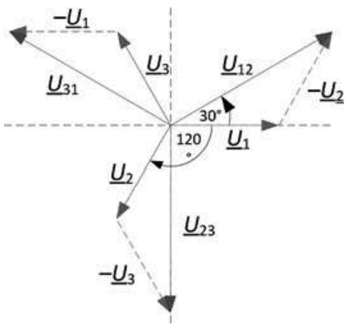

Bild 1.9 Spannungszeigerbild des 4-Leiter-Systems

1.3 Komplexe Darstellung

Jede komplexe Zahl kann durch die Angabe von Realteil (Re) und Imaginärteil (Im) in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt werden (Bild 1.10).

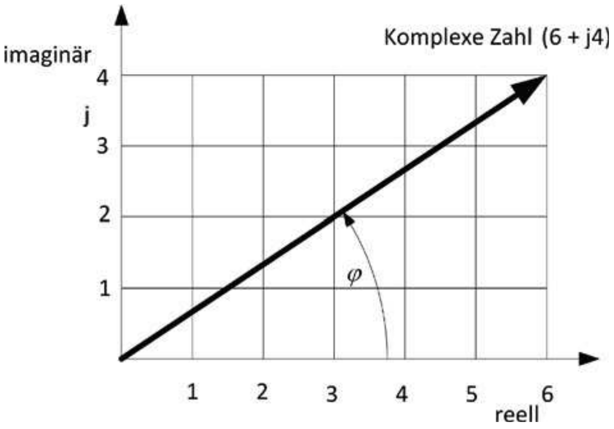

Bild 1.10 Komplexe Ebene

Die Kennzeichnung des Imaginärteils erfolgt durch den Buchstaben **j** (oder **i** für imaginäre Einheit).

Diese Darstellungsform ist auch bei Wechselspannungen und -strömen möglich, da auch sie einen Betrag und eine Phasenlage besitzen:

$$\hat{u} \cdot \sin\left(\omega t \pm \varphi\right) = \hat{u}_1 \sin \omega t \pm \hat{u}_2 \cos \omega t \tag{1.14}$$

Oder als komplexe Spannungsgleichung:

$$U = U_1 \pm \mathrm{j} U_2 \tag{1.15}$$

Eine komplexe Größe wird durch einen Unterstrich am Formelzeichen gekennzeichnet:

$$\underline{U}$$

Alternativ wird die Vektordarstellung auch durch einen Pfeil über dem Formelzeichen der jeweiligen physikalischen Größe gekennzeichnet:

$$\vec{u}$$

Für die Darstellung komplexer Größen sind drei Schreibweisen entwickelt worden:

Normalform

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \pm \mathrm{j}\underline{U}_2 \tag{1.16}$$

Trigonometrische Form

$$\underline{U} = U(\cos\varphi \pm \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{1.17}$$

Die Umrechnung für den Betrag lautet:

$$\left|\underline{U}\right| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \tag{1.18}$$

Für den Phasenwinkel gilt:

$$\tan\varphi = \frac{U_2}{U_1} \tag{1.19}$$

φ – Nullphasenwinkel

Exponentialform nach Euler

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{j}\sin\varphi \tag{1.20}$$

$$\underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\varphi} \tag{1.21}$$

U – Betrag

Die Darstellungsform einer komplexen Größe richtet sich nach ihrer Verwendung:

- Normalform: Addition und Subtraktion komplexer Größen
- Exponentialform: Multiplikation und Division komplexer Größen
- Trigonometrische Form: Umrechnung von der Normalform in die Exponentialform v. v.

Beispiel 1.1

Wandeln Sie die Spannung mit der Gleichung $u = 45{,}5\,\mathrm{V}\sin(\omega t + 20{,}2°)$ in die drei Darstellungsformen komplexer Größen um!

Lösung

Exponentialform: $\underline{U} = 32\,\mathrm{V}\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}20{,}2°}$

Trigonometrische Form: $\underline{U} = 32\,\mathrm{V}(\cos 20{,}2° + \mathrm{j}\sin 20{,}2°)$

Normalform: $\underline{U} = 30\,\mathrm{V} + \mathrm{j}11\,\mathrm{V}$

1.4 Leistung im Wechselstromkreis

Für die Berechnung der elektrischen Leistung muss berücksichtigt werden, ob es sich um den Betrieb an Gleichspannung, Wechselspannung oder Dreiphasen-Wechselspannung handelt. Bei Betrieb an Gleichspannung, die am Betriebsmittel einen Gleichstrom hervorruft, gilt mit U = konst. und I = konst.:

$$P = U \cdot I \tag{1.22}$$

Diese elektrische Leistung wird dabei vollständig in thermische, chemische oder z. B. mechanische Energie umgewandelt, als Wirkleistung bezeichnet und in der Einheit Watt (W) angegeben.

Bei Betrieb an nicht konstanten Spannungen und den dadurch ebenso nicht konstanten Strömen kann nur der jeweilige Augenblickswert der elektrischen Leistung berechnet werden.

Da bei nicht konstanten Größen Kleinbuchstaben verwendet werden, gilt bei $U \neq$ konst. und $I \neq$ konst.:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{1.23}$$

Bei veränderlichen Werten von Spannung (u) und Strom (i) entspricht die Wirkleistung dem Gleichwert der Augenblicksleistung p:

$$P = \overline{p} = \overline{u} \cdot \overline{i} \tag{1.24}$$

Für periodische Spannungen und Ströme ist diese über eine Periode T zu mitteln:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u \cdot i \, \mathrm{d}t \tag{1.25}$$

Bei sinusförmigen Spannungen und Strömen mit φ (Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom) gilt mit

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \\ i(t) &= \hat{i} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \tag{1.26}$$

somit:

$$p(t) = \hat{u} \sin \omega t \cdot \hat{i} \sin(\omega t - \varphi) \tag{1.27}$$

Mit

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos(\alpha + \beta)) \tag{1.28}$$

gilt:

$$p(t) = \left(\frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2}(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi))\right) \tag{1.29}$$