

# 2

## Gesamtmassenbilanzen



### Nichts geht verloren

Die Gesamtmassenbilanz ist das Kernstück der verfahrenstechnischen Bilanzierung. Mit ihrer Hilfe können die häufig verwendeten Volumenströme oder auch Strömungsgeschwindigkeiten berechnet werden. Sie kann helfen, Probleme im Betrieb, wie etwa Leckagen, zu finden. Häufig wird sie von Verfahreningenieuren unbewusst eingesetzt – aber da schlummern Gefahren, derer man sich bewusst werden sollte.

Dieses Kapitel zeigt,

- wie vielfältig die Anwendung von Gesamtmassenbilanzen ist und
- wie einfach sie aufgestellt werden können.

Die Erhaltung der Gesamtmasse ist einer der am häufigsten verwendeten verfahrenstechnischen Grundsätze. Da die Gesamtmasse wandlungsfrei ist, gilt hier im engeren Sinn „Was reingeht, muss auch wieder rauskommen – oder drin bleiben.“ Dieser Grundsatz lässt sich leicht verinnerlichen und in vielen Fällen auch gut prüfen. Sei es bei der Berechnung von Strömen im Inneren einer Anlage, sei es bei der Suche nach Leckagen – die Gesamtmassenbilanz über den betrachteten Apparat oder Anlagenteil kann Antworten liefern oder zumindest aufzeigen, in welcher Richtung weiter nach ihnen zu suchen ist.

Häufig werden Gesamtmassenbilanzen auf stationäre Prozesse angewendet. Dann muss ohne Abstriche das wieder herauskommen, was hineingeht. Werden in einem stationär betriebenen Apparat mehrere Ströme gemischt, die diesen Apparat dann in einem Strom verlassen, so muss der Abstrom gleich der Summe der Zuströme sein. Wenn die Dichte in allen Zuströmen gleich und über den Prozess konstant ist, können statt der Massenströme auch Volumenströme betrachtet werden. Aber Vorsicht, diese Annahme ist nur selten erfüllt. Insbesondere, wenn es mehrere Zuströme verschiedener Zusammensetzung gibt oder wenn Gasströme beteiligt sind, unterscheiden sich die Dichten meistens. In Fließbildern und Steuerungstools werden die Ströme aber häufig volumenbezogen angegeben, sodass auch in der Bilanzierung die Verwendung von Volumenströmen naheliegt. Hier ist große Aufmerksamkeit erforderlich, um keine Bilanzfehler zu machen, die dann zu Auslegungs- oder Steuerungsfehlern führen. Zur Sicherheit sollte immer zuerst eine „echte“ Massenbilanz erstellt werden, in die dann gemäß

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$$

die Volumenströme eingeführt werden.

Was bei der Betrachtung eines Apparats selbstverständlich erscheint, gerät bei der Betrachtung einer Rohrleitung oder eines anderen Anlagenteils, bei dem primär auf die Strömungsverhältnisse geschaut wird, nicht selten aus dem Blick. Für die Strömungsbetrachtung ist die gegenseitige Beeinflussung von Druck und Geschwindigkeit zentral. Diese Beziehung steht in der Impulsbilanz, die in der Regel in Form der um den Reibungsdruckverlust erweiterten

Bernoulli-Gleichung benutzt wird. Der aus der reibungsfreien Bernoulli-Gleichung abgeleitete Zusammenhang „großer Druck – kleine Geschwindigkeit, kleiner Druck – große Geschwindigkeit“ wird dann manchmal so uminterpretiert, dass aus einem reibungsbedingten Druckabfall auf eine Geschwindigkeitszunahme geschlossen wird. Das widerspricht der Massenerhaltung und muss auf jeden Fall vermieden werden. Hier hilft die Massenbilanz bei der Kontrolle und Interpretation von Ergebnissen aus der Bernoulli-Gleichung, teilweise ermöglicht sie die Lösung dieser Gleichung auch erst. So gibt es oft Fragestellungen der Art, dass für eine durchströmte Geometrie (das kann ein Rohr mit oder ohne Querschnittsänderung sein, aber auch ein Ventil, ein statischer Mischer oder ein Wärmeübertrager) der Volumenstrom und damit die Geschwindigkeit am Zulauf zusammen mit dem Druck an dieser Stelle bekannt sind. Soll der Druck am Ablauf bestimmt werden, tritt in der Bernoulli-Gleichung als zusätzliche Unbekannte die Geschwindigkeit am Ablauf auf. Um sie zu bestimmen, ist eine Gesamtmassenbilanz erforderlich.

Ein wichtiger Einsatzbereich von Massenbilanzen ist die Anlagenkontrolle. Um festzustellen, ob es Leckagen gibt, die zu unerwarteten Zu- oder Abströmen führen, können sie ohne großen Aufwand eingesetzt werden. Solche ungeplanten „Wege“ von Massenströmen können den Prozess beeinflussen, etwa wenn Luft in einen unter reduzierenden Bedingungen ablaufenden Prozessschritt eindringt. Sie können eine Gefährdung für Menschen und Umwelt darstellen, wenn toxische Gase oder Flüssigkeiten aus einer Anlage in die Umgebung austreten. Auch Ablagerungen im Apparat machen sich in der Massenbilanz bemerkbar. Je nach Art des Apparates und der möglichen Ablagerungen kann dies entweder eine unproblematische Erklärung für gewisse Abweichungen in der Bilanz sein, oder auf eine Prozessgefährdung hinweisen. So können rechtzeitig Gegenmaßnahmen ergriffen werden, um zu vermeiden, dass dünne Verbindungskanäle durch Ablagerungen verstopfen oder die Ablagerungen den Prozess chemisch beeinflussen.

Auch bei instationären Vorgängen, wie etwa dem Befüllen eines Apparats, kann eine Gesamtmassenbilanz ein wichtiges Auslegungswerkzeug sein. Hierbei ist es genauso wichtig, den Unterschied zwischen Masse und Volumen zu beachten. Die wenigsten technischen Gemische verhalten sich ideal. In der Regel treten Exzessvolumina auf, also Änderungen des Volumens durch den Mischvorgang. Um diesen Effekt richtig zu erfassen, muss bekannt sein, nach welchem thermodynamischen Gesetz die Mischung abläuft. Gegebenenfalls muss dabei auch die aus der Mischung resultierende Temperaturänderung berücksichtigt werden. Daraus kann dann mit Hilfe der Massenbilanz bestimmt werden, welches Volumen die Mischung am Ende einnimmt bzw. welche Menge an Ausgangsstoffen zugeführt werden muss, um ein bestimmtes Apparatvolumen zu befüllen.

Neben der Bearbeitung von Fragestellungen, die allein auf Grundlage von Gesamtmassenbilanzen erfolgen kann, bilden diese Bilanzen eine Grundlage für fast alle Einzelstoff- und Energiebilanzen, die in den folgenden Kapiteln besprochen werden.

## ■ 2.1 Herangehensweise

Gesamtmassenbilanzen sind die einfachste Art von Bilanzen, die in der Verfahrenstechnik zu handhaben sind. In den betrachteten Systemen wird die Gesamtmasse erhalten. Damit treten hier keine Wandlungsterme auf, die andere Bilanzen teilweise nichtlinear und damit analytisch schwer lösbar machen.

Auch molekulare Transportterme treten nicht auf. Die konvektive Geschwindigkeit ist als Geschwindigkeit der Massenpunkte bestimmt. Daher kann es keine Bewegung der Gesamtmasse relativ zur Konvektion geben. Dementsprechend kommen in Gesamtmassenbilanzen nur Speicherterme für die zeitliche Veränderung der Gesamtmasse eines instationären Systems und konvektive Zu- und Abströme vor.



Die Grundform der Gesamtmassenbilanz lautet:

$$\frac{dm}{dt} = \sum \dot{m}_{zu} - \sum \dot{m}_{ab} \quad (2.1)$$

An Stelle der Massenströme sind in vielen Fällen die Volumenströme oder die mittleren Geschwindigkeiten der Ströme relevant, sodass der Massenstrom unter Verwendung dieser Größen ausgedrückt werden muss:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot w \quad (2.2)$$

Die Fehlerquelle bei Gesamtmassenbilanzen liegt also nicht in der Komplexität der zu berücksichtigenden Terme, sondern besteht eher darin, dass die Bilanzen zu einfach „aus dem Bauch heraus“ aufgestellt werden. Das hat nicht selten den Effekt, dass statt der Massenerhaltung eine Volumenerhaltung angesetzt wird, die es aber nicht gibt. Lediglich in Systemen mit konstanter Dichte lässt sich gemäß

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (2.3)$$

die Gesamtmassenbilanz über die Volumina formulieren.

Ist ein System hinsichtlich der Gesamtmasse **stationär**, bedeutet das, dass sich die Masse des Systems mit der Zeit nicht ändert. Zusätzlich wird darunter verstanden, dass sich auch die Zu- und Abströme nicht mit der Zeit ändern. Damit ergibt sich die einfache Form:

$$\sum \dot{m}_{zu} = \sum \dot{m}_{ab} \quad (2.4)$$

Aus konstanten Massenströmen können einfach die in einer vorgegebenen Zeit transportierten Massen berechnet werden oder umgekehrt:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (2.5)$$

**Instationäre** Gesamtmassenbilanzen beschreiben zum Beispiel das Befüllen eines Behälters. Auf die in Abschnitt 1.4 vorgestellten Modelle idealer Apparate lassen sie sich nicht anwenden, da in allen diesen Modellansätzen die Annahme steckt, dass sich die Gesamtmasse im System nicht ändert.

Im Aufgabenteil sollen zwei Beispiele vorgestellt werden, die die Annahmen dieser Modelle erweitern und daher die Beschreibung durch eine instationäre Gesamtmassenbilanz benötigen.

## ■ 2.2 Merksätze



- Bei Gesamtmassenbilanzen müssen Dichteunterschiede beachtet werden.
- In Gesamtmassenbilanzen treten keine molekularen Ströme auf.
- Der Wandlungsterm der Gesamtmassenbilanz ist null.

## ■ 2.3 Aufgaben

### 2.3.1 Stationäre Bilanzen



#### Aufgabe 2.1 Ideal gemischter Rührkessel – Volumenstrom

*Diese Aufgabe verwendet zwar Zahlenwerte für einen fiktiven Prozess, ist in ihrer Grundform aber Bestandteil vieler Bilanzaufgaben, in denen der Volumenstrom des Ablaufs ein wichtiger Parameter ist – seien es Einzelstoff- oder Energiebilanzen.*

Einem stationär betriebenen idealen Rührkessel werden zwei Reaktionspartner in separaten Strömen zugeführt. Durch die Reaktion ergibt sich eine Dichte im Reaktor, die nicht dem Mittelwert der Dichten der Zulaufströme entspricht.

Wie groß ist der Ablauf-Volumenstrom?

$$\rho_{zu1} = 819 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{zu2} = 830 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_R = 845 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{V}_{zu1} = 53 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\dot{V}_{zu2} = 41 \text{ m}^3/\text{h}$$



#### Musterlösung 2.1

In Bild 2.1 ist der Apparat mit dem Bilanzraum gezeichnet. Es ist zu erkennen, dass drei Ströme über die Bilanzgrenze treten: zwei Zuströme und ein Abstrom.

# Index

## A

Abstrom 19, 31  
Anfangsbedingungen 127  
Arrhenius-Gleichung 47

## B

Bilanz  
– differentielle 21, 125  
– integrale 21  
Bilanzgleichung 18  
Bilanzgrenze 19, 24, 82  
Bilanzgröße 18, 23  
Bilanzraum 17, 24  
BR 22

## C

CSTR 22

## D

Differentialgleichung 123, 125  
Diffusion 19, 45

## E

Einzelstoffbilanz 23, 101, 102, 121, 126  
Element, chemisches 44  
Energie  
– innere 76  
– kinetische 18  
Energie, innere 18  
Energiebilanz 16, 23, 101, 103, 121, 126  
Energiedissipation 83  
Energieerhaltung 17  
Energieform 18  
Energiewandlung 18  
Erhaltungsgröße 18

Erhaltungssätze 17

## F

Fehler 31, 124  
Finite-Elemente-Methode 129  
Finite-Volumen-Methode 128

## G

Gesamtenergie 17  
Gesamtmasse 17  
Gesamtmassenbilanz 23, 101, 121, 126  
Geschwindigkeit 19, 31  
Gesetze, thermochemische 78  
Gleichgewicht 20, 43, 48, 101, 103, 121  
Gleichungssystem 123  
Größe  
– extensive 19  
– intensive 19, 125  
– molare 83  
– spezifische 83

## I

Impulsbilanz 126  
Impulserhaltung 17, 29

## K

Kinetik 20, 43  
Koeffizienten, stöchiometrische 46  
Kontinuitätsgleichung →  
Gesamtmassenbilanz  
Konzentration 45  
Kopplung 20

## L

Lattice-Boltzmann-Methode 129

**M**

Masse, molare 45  
Massenerhaltung 17  
Massenstrom 19  
Maßstabsübertragung 120  
Mischung 124

**N**

Nichtlinearität 20

**O**

Ökobilanz 16

**P**

Parameter 26  
Partialdruck 45  
Partikelzahl 49  
PFR 22, 49  
Phasenübergang 43, 83  
Prozesssimulation 44, 119

**R**

Randbedingungen 127  
Reaktion  
– endotherme 84  
– exotherme 84  
Reaktion, chemische 43  
Reaktionsgeschwindigkeit 46, 84  
Reibung, viskose 19  
Rührkessel  
– idealer diskontinuierlicher → BR  
– idealer kontinuierlicher → CSTR

**S**

Simulation  
– dynamische 123  
– statische 123  
Smoothed-Particle-Hydrodynamics 130  
Speicherterm 19, 31, 126  
Spezies, chemische 17, 45  
Stationarität 19, 21, 31

Stoffmenge 45  
Strömung 17  
Strömungsröhr, ideales → PFR  
Strömungssimulation 120  
Systeme, disperse 23

**T**

Teilmassen 17  
Temperatur 75, 101, 125  
Thermodynamik 30, 45, 101, 103, 122  
– erster Hauptsatz der 76  
Transport  
– konvektiver 19, 45, 78, 126  
– molekularer 19, 45, 80, 126  
Transportgröße 21, 125  
Turbulenzmodell 127

**U**

Umsatz 43, 101  
Umsatzvariable 20, 48

**V**

Verlustwärmestrom 80  
Verweilzeit 24  
Volumenstrom 29, 31  
Vorgehen 23, 31, 45, 78  
Vorzeichen 81

**W**

Wärme, latente 83  
Wärmedurchgang 82  
Wärmeenergie 77  
Wärmeleitung 19, 80  
Wärmestrahlung 20  
Wandlung 18, 20, 47, 83, 126

**Z**

Zeitgesetz 47  
Zonenmodell 24  
Zustandsgleichung 103  
Zustrom 19, 31